UNI. V L.

ŽLEB

Matematična preiskovalna naloga

PRVI PRIBLIŽEK NALOGE

Avtorica: Veronika Vičar

Ljubljana, april 2020

Kazalo

1 IZZIV

Iz pločevinastega traku širine *50 cm* želimo napraviti žleb, katerega profil ima obliko pravokotnika, trikotnika ali enakokrakega trapeza (vse brez zgornje stranice).
Kakšno obliko naj izberemo, da bo po žlebu lahko odtekalo čim več vode?

2 POSTAVITEV VPRAŠANJA

Kakšne oblike mora biti profil žleba, da bo po žlebu odtekalo največ vode?

2.1 Izhodišče in cilj

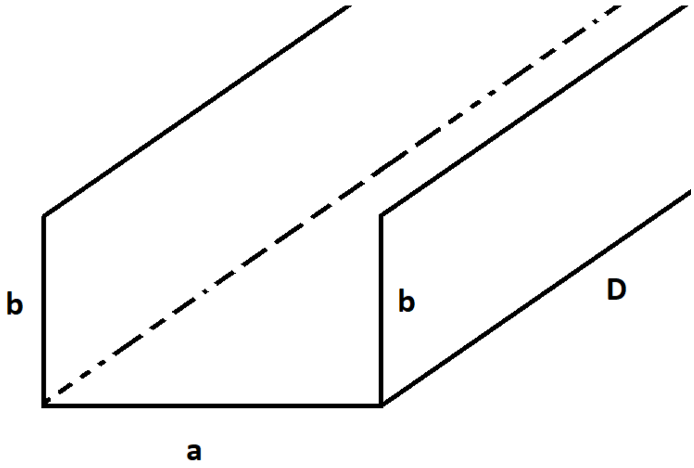
Moje izhodišče je hkrati moj cilj, in sicer želim iz dane širine (pločevinastega) traku dobiti tak profil žleba, da bo odtok vode po njem največji.

3 IZVEDBA IN OPIS

Med oblikami pravokotnega, trikotnega in trapeznega (enakokraki trapez) profila žleba iščem takšno obliko, da bo po žlebu odteklo največ vode. Pravzaprav iščem obliko žleba, ki ima največji volumen, saj po največjem volumnu nekega telesa (v mojem primeru telesa brez zgornje stranice) lahko odteče tudi največji volumen vode. Ko v matematiki iščemo maksimum neke funkcije naredimo odvod (in ga enačimo z 0). Zato bom v svojem preiskovanju iskala maksimum volumna treh oblik (profilov) žlebov, torej bom odvajala volumne žlebov po stranicah in kotih njihov profilov.

Vse tri oblike žlebov naredimo iz pločevinastega traku širine *50 cm* (to širino bom označevala z L), zato imajo profili vseh treh oblik žlebov enak "obseg" oz. enako širino ogrodja (brez zgornje stranice), prav tako pa imajo tudi enako (konstantno) dolžino (to dolžino bom označevala s črko D).

3.1 ŽLEB S PROFILOM PRAVOKOTNIKA



Slika 3.1.1. Žleb s profilom pravokotnika

Širina traku L, oblikovan v profil pravokotne oblike, izražena s stranicama a in b:

$$L = a + 2b \rightarrow a = L - 2b$$

Volumen žleba katerega profil ima obliko pravokotnika, spremenljivka bo stranica b:

$$V = S \cdot D = a \cdot b \cdot D = (L - 2b)b \cdot D = LbD - 2b^2D$$

$S = a \cdot b$ … *ploščina osnovne ploskve (pravokotnika) žleba*
D … *dolžina žleba*

Iščem torej takšno dolžino stranice b, da bo volumen žleba s profilom oblike pravokotnika največji, zato poiščem maksimum z odvajanjem volumna po spremenljivki (stranici) b:

$$\frac{dV}{db} = 0$$

$$\frac{d}{db}(LbD - 2b^2D) = 0$$

$$LD - 4bD = 0 \ /:D$$

$$L - 4b = 0$$

$$b = \frac{L}{4}$$

preverim, če je to res maksimum ($\frac{d^2V}{db^2} < 0$, da bo $b = \frac{L}{4}$ maksimum):

$$\frac{d^2V}{db^2} = -4D < 0 \ (saj\ D > 0) \rightarrow maksimum \ \checkmark$$

Torej, da bo volumen žleba s pravokotnim profilom maksimalen mora biti stranica $b = \frac{L}{4}$, iz tega pa sledi:

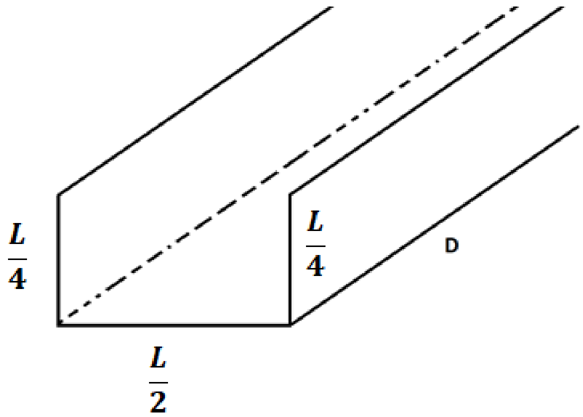
$$a = L - 2b = L - 2\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{L}{2}$$

$$\boldsymbol{a = \frac{L}{2}}$$

$$\boldsymbol{b = \frac{L}{4}}$$

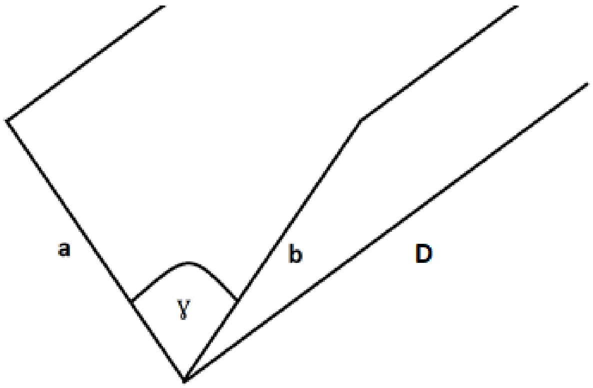
$V = a \cdot b \cdot D = \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} \cdot D$

$$\boldsymbol{V = \frac{L^2 D}{8}}$$



Slika 3.1.2 Žleb z največjim pravokotnim profilom

3.2 ŽLEB S PROFILOM TRIKOTNIKA



Slika 3.2.1..Žleb s profilom trikotnika

Širina L profila trikotne oblike izražena s stranicama a in b:

$$L = a + b \ \rightarrow \ a = L - b$$

Volumen žleba katerega profil ima obliko trikotnika s spremenljivkama b in ɣ:

$$V = S \cdot D = \frac{a\, b\, sin\gamma}{2} \cdot D = \frac{(L-b)\, b\, sin\gamma}{2} \cdot D \ = \ \frac{LbDsin\gamma - \ b^2Dsin\gamma}{2}$$

$S \ = \ \frac{a\, v_a}{2} \ = \ \frac{a\, b\, sin\gamma}{2}$ … *ploščina osnovne ploskve (trikotnika) žleba*
D … *dolžina žleba*

Iščem takšno dolžino stranice b in takšen kot ɣ, da bo volumen žleba s profilom oblike trikotnika največji, zato poiščem maksimum s parcialnima odvodoma volumna po b in ɣ :
Kandidati za ekstreme-stacionarne točke:

1) $\frac{\partial V}{\partial b} = 0$
2) $\frac{\partial V}{\partial \gamma} = 0$

1b) $\frac{\partial V}{\partial b} = 0$

$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{LbDsin\gamma - b^2Dsin\gamma}{2}\right) = 0$

$\frac{1}{2}\,(LDsin\gamma \ - \ 2bDsin\gamma) \ = 0 \ /:\frac{1}{2}Dsin\gamma$

$L\text{-}2b=0$

$$b = \frac{L}{2}$$

2b) $\frac{\partial V}{\partial \gamma} = 0$

$\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{LbD\sin\gamma - b^2 D\sin\gamma}{2}\right) = 0$

$\frac{1}{2}(LbD\cos\gamma - b^2 D\cos\gamma) = 0 \;/ : \frac{1}{2}Db$

$L\cos\gamma - b\cos\gamma = 0$

$\cos\gamma(L-b)=0 \;/ :(L-b)$

$\cos\gamma=0$

$$\gamma=90^{o}$$

Iz točke 1) in 2) dobimo stacionarno točko *($\frac{L}{2}$, 90°)*. Preveriti moramo še, da je ta točka res maksimum:

Poglejmo si sledeč *izrek* za ekstreme funkcij dveh spremenljivk:

> **Izrek 3.5.2. (Zadosten pogoj za nastop ekstrema)** *Točka (a, b) naj bo stacionarna točka dvakrat zvezno parcialno odvedljive funkcije $f(x, y)$, naj bodo*
>
> $$A = f_{xx}(a, b), \quad B = f_{xy}(a, b) \quad in \quad C = f_{yy}(a, b)$$
>
> *vrednosti drugih parcialnih odvodov funkcije f v tej točki in*
>
> $$H(a, b) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$
>
> *matrika drugih parcialnih odvodov. Potem velja:*
>
> *1. če je $\det H(a, b) = AC - B^2 > 0$, je v točki (a, b) lokalni minimum, kadar je $A > 0$, in lokalni maksimum, kadar je $A < 0$,*
>
> *2. če je $\det H((a, b)) < 0$, je v točki (a, b) sedlo,*
>
> *3. če je $\det H((a, b)) = AC - B^2 = 0$ pa na podlagi drugih parcialnih odvodov običajno o obstoju ekstrema ne moremo sklepati.*

Slika 3.2.2. Slika izreka iz matematične skripte (pridobljena 20. 04. 2020 s, https://ucilnica.fri.uni-lj.si/pluginfile.php/5303/mod_page/content/78/mat2fvs.pdf)

Preverim (z *izrekom 3.5.2*), če je stacionarna točka ($\frac{L}{2}$, 90°) maksimum:

$$\frac{d^2V}{db^2} = -D\sin\gamma$$

$$\frac{d^2V}{d\gamma^2} = \frac{1}{2}(-LbD\sin\gamma + b^2 D\sin\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial \gamma} = \frac{1}{2}(LD\cos\gamma - 2bD\cos\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \gamma \partial b} = \frac{1}{2}(LD\cos\gamma - 2bD\cos\gamma)$$

Hessejeva matrika je:

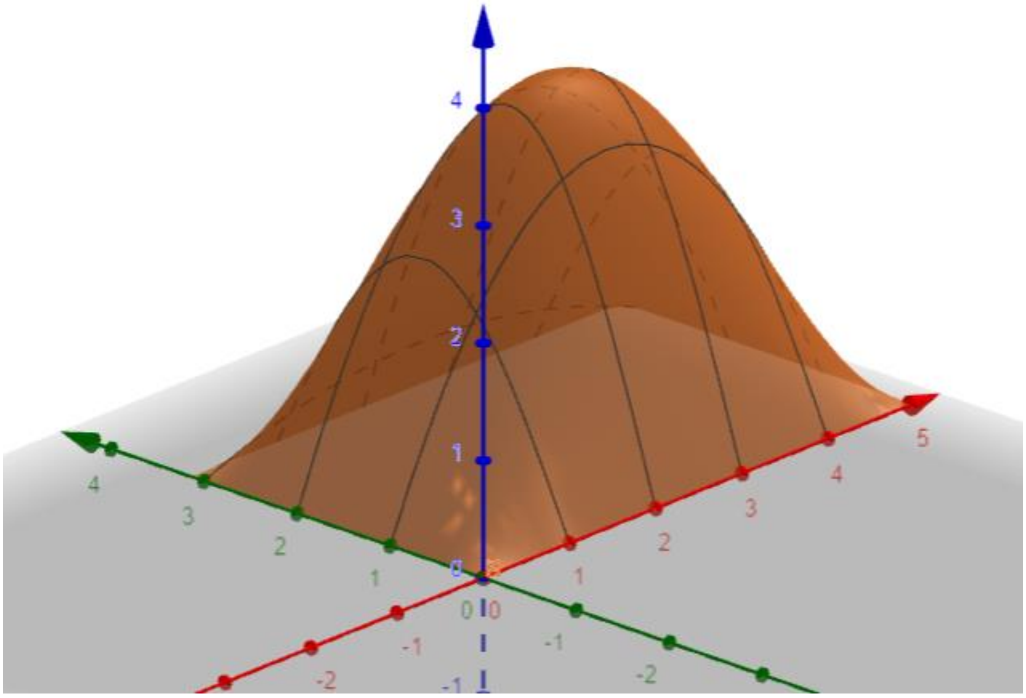
$$H(b,\gamma) = \begin{bmatrix} -D\sin\gamma & \frac{1}{2}(LD\cos\gamma - 2bD\cos\gamma) \\ \frac{1}{2}(LD\cos\gamma - 2bD\cos\gamma) & \frac{1}{2}(-LbD\sin\gamma + b^2 D\sin\gamma) \end{bmatrix}$$

$$H\left(\frac{L}{2}, 90^o\right) = \begin{bmatrix} -D & 0 \\ 0 & -\frac{L^2D}{8} \end{bmatrix}$$

$$det\left(H\left(\frac{L}{2}, 90^o\right)\right) = (-D)\left(-\frac{L^2D}{8}\right) - 0 = \frac{L^2D^2}{8}$$

$$det\left(H\left(\frac{L}{2}, 90^o\right)\right) = \frac{L^2D^2}{8} > 0$$

→ po *izreku 3.5.2* sledi, da je v točki $(\frac{L}{2}, 90^o)$ lokalni ekstrem, saj $\frac{L^2D^2}{8} > 0$, in sicer maksimum, saj je $-D < 0$ (saj $D>0$) ✓



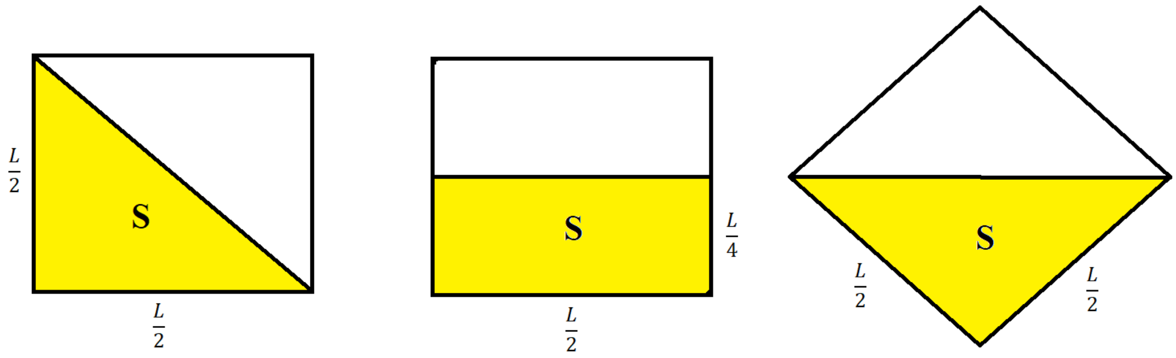
Slika 3.1 Grafični prikaz (v geogebri) maksimuma funkcije volumna žleba s trikotnim profilom glede na stranico b kot in ɣ (rdeča os predstavlja b, zelena os predstavlja ɣ): $V = \frac{LbD\sin ɣ - b^2D\sin ɣ}{2}$

Izračunamo še dolžino stranice *a*:

$$b = \frac{L}{2} \rightarrow a = L - b = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}$$

Za dokazovanje maksimuma pa si lahko pomagamo tudi še z laičnim geometrijskim "dokazom":
Predpostavila bom, da dobimo največji volumen žleba s trikotnim profilom, če je:
$ɣ = 90^o$
$a = b = \frac{L}{2}$
To pomeni, da je naš profil žleba enakokraki pravokotni trikotnik.
Profil v obliki pravokotnika, ki smo ga dobili v *podpoglavju 3.1*, je hkrati polovica kvadrata s stranico $\frac{L}{2}$. Če zarotiramo dobljeni kvadrat za kot 45^o in če ga po diagonali odrežemo, dobimo pravokotni enakokraki trikotnik, ki ima enako ploščino kot pravokotnik (polovica kvadrata s

stranico $\frac{L}{2}$), ki smo ga dobili v *podpoglavju 3.1*. Zato lahko sklepamo, da je tudi opisani geometrijski "dokaz" potrdil računski dokaz maksimuma v stacionarni točki *($\frac{L}{2}$, 90°)*.



Slika 3.2.3. Slika geometrijskega "dokaza"

Torej, da bo volumen žleba s trikotnim profilom maksimalen mora biti profil pravokotni enakokraki trikotnik:

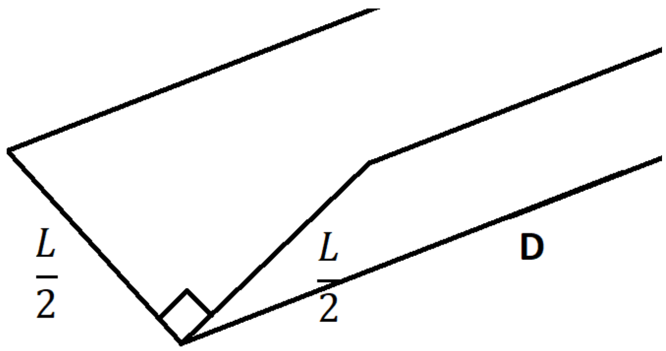
$$\boldsymbol{a = b = \frac{L}{2}}$$

$$\boldsymbol{\gamma = 90^o}$$

$$V = \frac{a\,b\,\sin\gamma}{2} \cdot D = \frac{\frac{L}{2}\,\frac{L}{2}\,\sin 90^o}{2} \cdot D$$

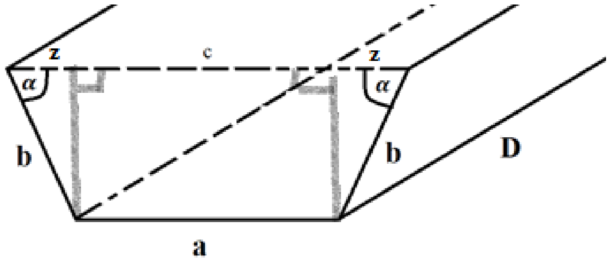
$$\boldsymbol{V = \frac{L^2\,D}{8}}$$

….enak volumen dobimo pri žlebu s pravokotnim profilom



Slika 3.2.4 Žleb z največjim trikotnim profilom

3.3 ŽLEB S PROFILOM ENAKOKRAKEGA TRAPEZA



Slika 3.3.1. Žleb s profilom enakokrakega trapeza

Širina profila enakokrake-trapezne oblike:

$$L = a + 2b \;\rightarrow\; a = L - 2b$$
$$c = a + 2z = a + 2bcos\alpha = L - 2b + 2bcos\alpha$$

Volumen žleba katerega profil ima obliko enakokrakega trapeza s spremenljivkama b in α:

$$V = S \cdot D = \frac{a+c}{2} v \cdot D = \frac{2L - 4b + 2bcos\alpha}{2}\, v \cdot D = \frac{2L - 4b + 2bcos\alpha}{2}\, bsin\alpha \cdot D =$$
$$= LDbsin\alpha - 2Db^2 sin\alpha + Db^2 sin\alpha cos\alpha = LDbsin\alpha - 2Db^2 sin\alpha + \frac{Db^2 sin2\alpha}{2}$$

$S = \frac{a+c}{2} = \frac{2L-4b+2bcos\alpha}{2}$ *… ploščina osnovne ploskve (enakokrakega trapeza) žleba*
D … *dolžina žleba*

Iščem takšno dolžino stranice b in takšen kot α, da bo volumen žleba s profilom oblike enakokrakega trapeza največja, zato poiščem maksimum s parcialnima odvodoma volumna po b in α :

Kandidati za ekstreme-stacionarne točke:

1) $\frac{\partial V}{\partial b} = 0$
2) $\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0$

1a) $\frac{\partial}{\partial b}(LDbsin\alpha - 2Db^2 sin\alpha + Db^2 sin\alpha cos\alpha) = 0$
$LDsin\alpha - 4Dbsin\alpha + 2Dbsin\alpha cos\alpha = 0 \;/ : Dsin\alpha$
$L - 4b + 2bcos\alpha = 0$

$$b = \frac{L}{4 - 2cos\alpha}$$

2b) $\frac{\partial}{\partial\alpha}$ $(LDbsin\alpha - 2Db^2sin\alpha + \frac{Db^2 sin2\alpha}{2}) = 0$

$LDbcos\alpha - 2Db^2cos\alpha + Db^2cos2\alpha = 0 \; /:Db$

$Lcos\alpha - 2bcos\alpha + bcos2\alpha = 0$, $\qquad cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$

$Lcos\alpha - 2bcos\alpha + 2bcos^2\alpha - b = 0$

$$b = \frac{Lcos\alpha}{2cos\alpha - 2cos^2\alpha + 1}$$

Izenačimo enačbi 1) in 2) in dobimo:

$\frac{L}{4-2cos\alpha} = \frac{Lcos\alpha}{2cos\alpha - 2cos^2\alpha + 1}$

$4cos\alpha - 2cos^2\alpha = 2cos\alpha - 2cos^2\alpha + 1$

$2cos\alpha = 1$

$cos\alpha = \frac{1}{2}$

$$\alpha = 60^o$$

Vstavimo $\alpha = 60^o$ v eno od enačb, npr. v 1) in dobimo (dolžino) stranice b:

$b = \frac{L}{4 - 2cos60^o}$

$$b = \frac{L}{3}$$

Iz točke 1) in 2) dobimo stacionarno točko $(\frac{L}{3}, 60^o)$. Preveriti moramo še, da je ta točka res maksimum z uporabo zgornjega *izreka 3.5.2 (slike izreka)*:

$$\frac{d^2V}{db^2} = -4Dsin\alpha + Dsin2\alpha$$

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = -LDbsin\alpha + 2Db^2sin\alpha - 2Db^2sin2\alpha$$

$$\frac{\partial^2V}{\partial b\partial\alpha} = LDcos\alpha - 4Dbcos\alpha + 2Dbcos2\alpha$$

$$\frac{\partial^2V}{\partial\alpha\partial b} = LDcos\alpha - 4Dbcos\alpha + 2Dbcos2\alpha$$

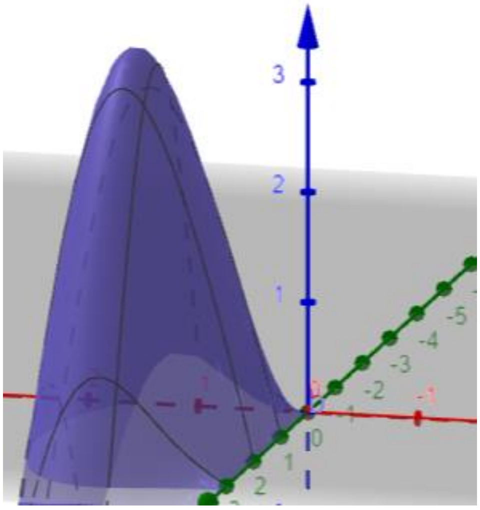
$$H(b, \alpha) = \begin{bmatrix} -4Dsin\alpha + Dsin2\alpha & LDcos\alpha - 4Dbcos\alpha + 2Dbcos2\alpha \\ LDcos\alpha - 4Dbcos\alpha + 2Dbcos2\alpha & -LDbsin\alpha + 2Db^2sin\alpha - 2Db^2sin2\alpha \end{bmatrix}$$

$$H(\frac{L}{3}, 60^o) = \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{2}D & -\frac{1}{2}DL \\ -\frac{1}{2}DL & -\frac{\sqrt{3}}{6}DL^2 \end{bmatrix}$$

$$det(H(\frac{L}{3}, 60^o)) = (-\frac{3\sqrt{3}}{2}D)(-\frac{\sqrt{3}}{6}DL^2) - (-\frac{1}{2}DL)(-\frac{1}{2}DL)$$

$$det(H(\frac{L}{3}, 60^o)) = \frac{1}{2}D^2L^2 > 0$$

→ po *izreku 3.5.2* sledi, da je v točki ($\frac{L}{3}$, 60^o) lokalni ekstrem, saj $\frac{1}{2}D^2L^2 > 0$, in sicer maksimum, saj je $-\frac{3\sqrt{3}}{2} D < 0$ (saj D>0) ✓



Slika 3.2 *Grafični prikaz (v geogebri) maksimuma funkcije volumna žleba z enakokrako-trapeznim profilom glede na stranico b in kot α (rdeča os predstavlja b, zelena os predstavlja α)*:
$V = LDbsin\alpha - 2Db^2sin\alpha + \frac{Db^2sin2\alpha}{2}$

Sedaj pa še $b=\frac{L}{3}$ vstavimo v enačbo $a=L-2b$, da dobimo a:

$a=L-2\frac{L}{3}$

$$a=b=\frac{L}{3}$$

$$(c=a+2z=a+2bcos\,60° = a+2acos\,60° = 2a)$$

Dobimo enakokraki trapez, katerega osnovnica a je enako dolgo kot kraka b, oz. trapez, ki je sestavljen iz treh enakostraničnih trikotnikov s stranico $\frac{L}{3}$.

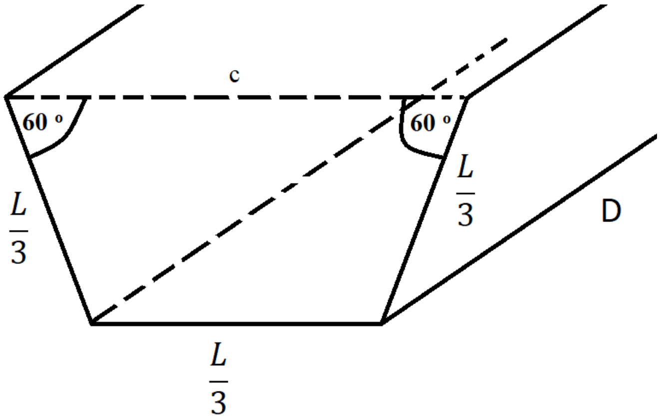
Torej, da bo volumen žleba z enakokrako-trapeznim profilom maksimalen mora biti profil enakokraki trapez za katerega velja:

$$\boldsymbol{a=b=\frac{L}{3}}$$

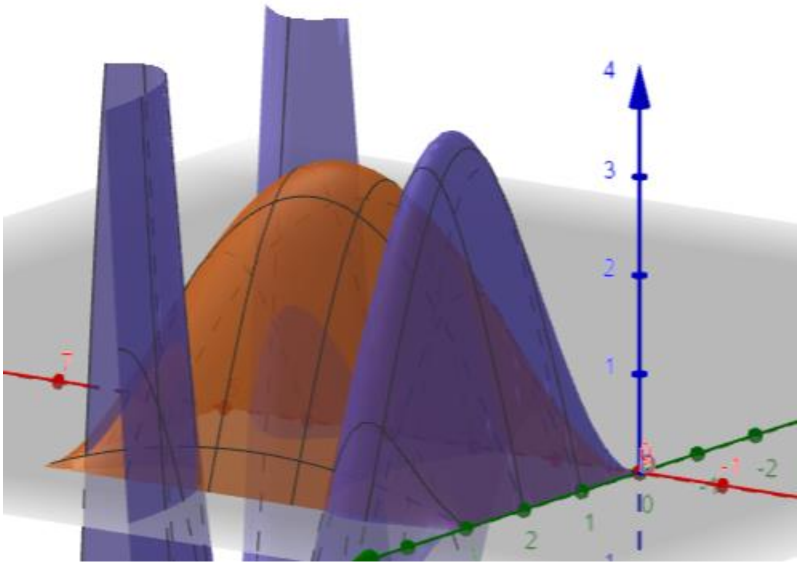
$$\boldsymbol{\alpha=60^o}$$

$V= LDbsin\alpha -2Db^2sin\alpha+ Db^2sin\alpha cos\alpha=LD\frac{L}{3}sin60^o-2D(\frac{L}{3})^2 sin60^o + D(\frac{L}{3})^2 sin60^o cos60^o$

$$\boldsymbol{V = \frac{\sqrt{3}\,L^2\,D}{12}}$$



Slika 3.3.2. Žleb z največjim enakokrako-trapeznim profilom



Slika 3.3 Primerjava obeh funkcij za trikotni profil (rjava površina/hrib) in enakokrako-trapezni profil (modra površina/hrib) na istem grafu. Iz grafa je razvidno, da je maksimum volumna pri enakokrako-trapeznem profilu višji od trikotnega. Na grafu vidna dva modra "stebra" ne pripadata ekstremu, ki ga iščemo.

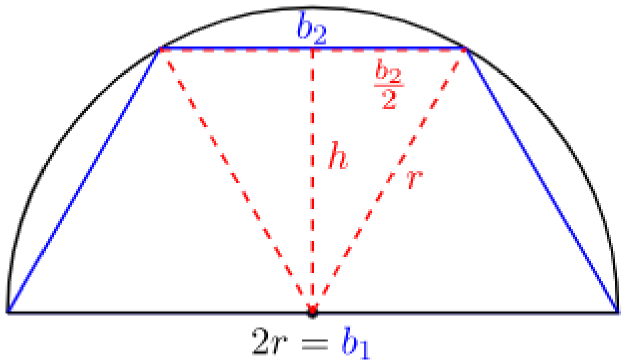
Ta volumen žleba pa je **največji** od vseh treh oblik žleba, saj $\frac{\sqrt{3}\,L^2\,D}{12} > \frac{L^2\,D}{8}$.

Odgovor na naš "izziv" je torej:

Po žlebu iz pločevinastega traku (širine L=50 cm in dolžine D) bo izmed treh danih oblik profila žleba, odtekalo največ vode, če bo profil žleba imel obliko enakokrakega trapeza (brez zgornje stranice in a=b=$\frac{L}{3}$, α=60°). Tak žleb ima volumen $V = \frac{\sqrt{3}\,L^2\,D}{12}$.

3.4 ŽLEB S PROFILOM POLKROGA-NAJBOLJŠI PROFIL

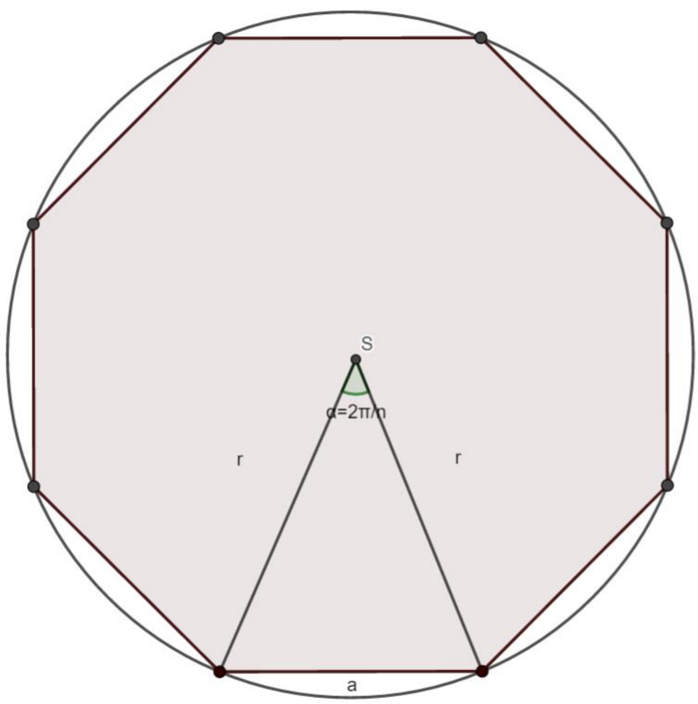
Moj cilj je poiskati profil žleba po katerem bo odtekalo največ vode. V *podpoglavju 3.3* sem dokazala, da je izmed pravokotnega, trikotnega in enakokrako-trapeznega profila žleba, enakokrako-trapezna oblika najboljša, saj po "enakokrako-trapeznem" žlebu odteče največ vode. Ploščina takšnega trapeza je največje izmed vseh treh obravnavanih oblik. Enakokraki trapez, katerega tudi osnovnica a je enako dolgo kot kraka b, pa se izmed vseh treh opisanih oblik, pa tudi izmed vseh ostalih poljubnih trapeznih oblik, najbolj prilega polkrogu (oz. opisanemu enakokrakemu trapezu lahko očrtamo polkrog, ki se bo najbolj prilegal stranicam le-tega.)



Slika 3.4.1 Enakokraki trapez v polkrogu

(pridobljeno 20. 04. 2020, s http://www.stumblingrobot.com/2015/10/07/find-the-largest-trapezoid-that-can-be-inscribed-in-a-semicircle/)

Zdaj pa si zamislimo, da enakostraničnemu n-kotniku očrtamo krog. Obseg tega enakostraničnega n-kotnika je $o=n \cdot a$, kjer je a dolžina stranice enakostraničnega n-kotnika. S tem, ko se veča število stranic enakostraničnega n-kotnika, se manjša dolžina stranice a, in enakostranični mnogokotnik se vedno bolj prilega krogu oz., obseg in ploščina enakostraničnega n-kotnika sta vedno bolj podobna obsegu in ploščini kroga.



Slika 3.4.2. Primer očrtanega kroga enakostraničnemu 8-kotniku

Ploščina n-kotnika je S_n=$\frac{nav_a}{2}$. n-kotnik je sestavljen iz n enakokrakih trikotnikov. Naj bo v našem primeru krak enakokrakega trikotnika dolžine r (polmer očrtanega kroga n-kotniku). Ploščina takega enakokrakega trikotnika je:

$$S_1=\frac{r^2 sin\alpha}{2}, \qquad \alpha= \frac{2\pi}{n}$$

Velja pa tudi, da je osnovnica a tega enakokrakega trikotnika, ki je hkrati stranica enakostraničnega n-kotnika:

$$a=2rsin\frac{\alpha}{2} \rightarrow a=2rsin\frac{\pi}{n} \rightarrow r= \frac{a}{2sin(\frac{\pi}{n})}$$

končna formula za ploščino enakostraničnega n-kotnika je:

$$S_n=\frac{na^2sin(\frac{2\pi}{n})}{8sin^2(\frac{\pi}{n})} = \frac{2na^2sin(\frac{\pi}{n})cos(\frac{\pi}{n})}{8sin^2(\frac{\pi}{n})} = \frac{na^2cos(\frac{\pi}{n})}{4sin(\frac{\pi}{n})} = \frac{1}{4}na^2cot(\frac{\pi}{n})$$

$a = \frac{o}{n}$ *...obseg je konstanten*

$S_n = \frac{o^2}{4n}cot(\frac{\pi}{n})$

Edina spremenljivka je torej n (število stranic enakostraničnega n-kotnika), zato ploščino odvajamo po n, saj iščemo maksimum:

$$\frac{dS_n}{dn} =0$$

$$\frac{d}{dn}(\frac{o^2}{4n}cot(\frac{\pi}{n}))=0$$

$$\frac{1}{4}(-\frac{o^2}{n^2}cot\left(\frac{\pi}{n}\right)+\frac{o^2\pi}{n^3sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}) = 0 \ /:\frac{1}{4}o^2n^2$$

$$\frac{\pi}{nsin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \ /:\frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\frac{\pi}{n\ sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\frac{\pi}{n} = sin\left(\frac{\pi}{n}\right)cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\frac{\pi}{n} = \frac{sin\left(2\frac{\pi}{n}\right)}{2}$$

$$\frac{2\pi}{n} = sin\left(2\frac{\pi}{n}\right)$$

ta enačba je rešljiva za $\boldsymbol{\frac{2\pi}{n}} = \boldsymbol{0}$, to pa velja, ko gre $\boldsymbol{n} \rightarrow \infty$, n-kotnik se prelevi v krog.
Dokaz, da je pri $n \rightarrow \infty$ maksimum (in ne minimum):
Naredimo drugi odvod:

$$\frac{d^2S_n}{dn^2} =\frac{d^2}{dn^2}(\frac{1}{4}(-\frac{o^2}{n^2}cot\left(\frac{\pi}{n}\right)+\frac{o^2\pi}{n^3sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}))$$

$$\frac{d^2S_n}{dn^2} = -\frac{o^2}{4n^3}\left(\frac{4\pi n^3 - 2\pi^2\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^2 sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} + \frac{2\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^3}\right)$$

Grafično preverimo, če je $\frac{d^2S_n}{dn^2} < 0$ (maksimum), ko $n \to \infty$:
(za katerikoli obseg o, npr. za $o = 10\ dm$)

Slika 3.4.3. Graf funkcije $\frac{d^2S_n}{dn^2} = -\frac{o^2}{4n^3}\left(\frac{4\pi n^3 - 2\pi^2 cot\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^2 sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} + \frac{2\,cot\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^3}\right)$

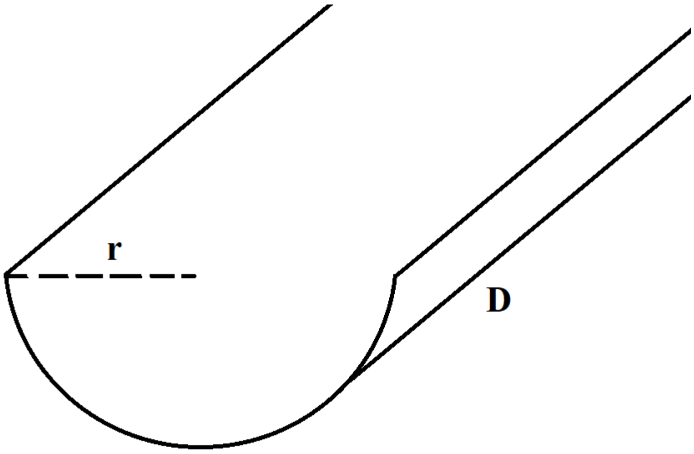
Iz grafa vidimo, da ko gre $n \to \infty$, je funkcija $\frac{d^2S_n}{dn^2} < 0$, gre proti negativni vrednosti (približa se vrednosti -32 (če $o=10\ dm$), to je $-\frac{o^2}{\pi}$; iz členov drugega odvoda je namreč različen od nič samo člen $\lim_{\frac{\pi}{n}\to 0}\left(\frac{\pi}{n^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right) = \frac{1}{\pi}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = \frac{1}{\pi}$), zato velja, da je za $n \to \infty$ ploščina (enakostraničnega mnogokotnika) res maksimalna. ✓

Iz izračunov torej sledi, da je ploščina enakostraničnega n-kotnika največja, ko gre $n \to \infty$, to pa pomeni, da ne gre več za enakostranični mnogokotnik, ampak za krog oz. za ploščino kroga. To je dokaz, da je pri danem (konstantnem) obsegu ploščina kroga največja (od vseh drugih možnih likov). Pri dokazu sem si pomagala s forumom *kvarkadabra* (http://forum.kvarkadabra.net/viewtopic.php?t=2192, pridobljeno 20. 04. 2020).

Polkrožni profil nam zagotavlja največje ploščino izmed vseh možnih likov, zato je tudi volumen takšnega žleba največji in se po njem lahko odvaja največ vode.

3.4.1 VOLUMEN ŽLEBA S POLKROŽNIM PROFILOM

Poglejmo si kakšen je volumen žleba s polkrožnim profilom:



Slika 3.4.1.1. Žleb s profilom polkroga

Širina profila polkrožne oblike:

$$L = \frac{obseg\ kroga}{2} = \frac{2\pi r}{2} = \pi r \longrightarrow r = \frac{L}{\pi}$$

Volumen žleba katerega profil ima obliko polkroga:

$$V = S \cdot D = \frac{\pi r^2}{2} \cdot D = \frac{\pi(\frac{L}{\pi})^2}{2} \cdot D = \frac{L^2 D}{2\pi}$$

$S = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi(\frac{L}{\pi})^2}{2}$… ploščina osnovne ploskve (polkroga) žleba
D …dolžina žleba

Sledijo primerjave volumnov žlebov različnih profilov iz enako širokih pločevinastih trakov:
$V_{polkrog} > V_{enakokraki\ trapez} > V_{pravkotnik\ in\ trikotnik}$ **oz.** $\frac{L^2 D}{2\pi} > \frac{\sqrt{3}\, L^2\, D}{12} > \frac{L^2\, D}{8}$
Po žlebu iz pločevinastega traku (recimo širine *L*=50 cm in dolžine *D*) bo odtekalo največ vode, če bo profil žleba imel obliko polkroga (brez zgornje stranice in s polmerom *r*). Tak žleb ima volumen V= $\frac{L^2 D}{2\pi}$ **.**

4 DIDONIN PROBLEM

Poglejmo si še zgodovinsko zgodbo o maksimalni ploščini lika pri danem obsegu.
Znamenito legendo o prvi kartažanski kraljici Didoni in ustanovitvi mesta Kartagine najdemo v klasičnem delu Aneida, enega največjih pesnikov antičnega Rima, Virgila (70-19 pr. Kr.). Leto 815 pr. Kr. je feničanska princesa Didona pobegnila s svojimi podporniki pred bratom, ki je bil hkrati feničanski vladar in je tudi umoril njenega moža. S plovbo po Sredozemskem morju zahodno od svojega rojstnega mesta Tira je pristala na afriški obali, danes je to Tunizijski zaliv. Iskala je parcelo za izgradnjo skrivališča. Vendar ji lokalni vladar Jarb željene zemlje ni hotel prodati. Didona se je zelo zvito in spretno pogajala, prepričala je Jarba, ki je tako prisluhnil njeni "ponižni" želji, da ji proda zgolj košček zemlje, ki ga je mogoče omejiti s kožo vola. Didona pa je nato svojim podložnikom zvito zapovedala, da naredijo zelo ozke trakove iz volovega usnja in z njimi označijo mejo parcele, ki bo imela čim večjo ploščino (površino). Na označeni, zaradi trika s trakovi, kar veliki parceli je zgradila trdnjavo Birso (po feničansko koža) in tako je kmalu nastalo znamenito mesto Kartagina. Iz omenjenih zgodb je nastal t. i. Didonin problem in sicer: Kako določiti največjo ploščino, ki jo lahko omejijo pasovi iz volovskega usnja (omejena dolžina)? Pasove so sestavili v krog, saj so že v Antiki geometrijsko dokazali, da je krog lik z največjo ploščino pri danem obsegu (od vseh drugih možnih likov) (Bandle, 2017).
Danes ta problem matematično razrešimo preko variacijskega računa, kjer najprej splošno podamo integralsko enačbo za dolžino krivulje ($L = \oint \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$) in njeno ploščino (površino) ($S = \frac{1}{2} \oint (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt$) in nato preko parcialnih odvodov (Lagrangeovih multiplikatorjev) poiščemo maksimum ploščine (površine) za družino vseh možnih krivulj – ven se »pričakovano« izlušči krožnica (Mathematical Garden, 2008).


Sliki 4. Didonin problem maks. površine pri danem obsegu lika. Desno, Didodina smrt, Guercino, 1631. Vir: https://de.wikipedia.org/wiki/Dido_(Mythologie) in https://en.wikipedia.org/wiki/Dido.
Feničani so najbrž prvi razvili alfabetski način pisanja okrog 1400 do 1050 pr. Kr. (22 črk za foneme, za soglasnike, samoglasnikov niso pisali) – danes večino znanstvenih člankov najdemo zapisanih v »kopijah« feničanske abecede – latinice s samoglasniki. Črke prav podobne feničanskim (pozneje prevlada latinica), so se uporabljale na ozemlju Slovenije skoraj do srednjega veka. Tudi naša narečja vlečejo rdečo nit s prastarimi jeziki – recimo zelo s sanskrtom, z jezikom Etruščanov, Venetov, potem z latinščino ...

5 UGOTOVITVE IN ZAKLJUČEK

V preiskovalni nalogi sem dokazala, da imajo žlebovi polkrožni profil, ker nam tak profil omogoča, da po žlebovih odteče največ vode, torej njihova oblika ni le neka naključna oblika. Žleb s polkrožnim profilom, iz pločevinastega traku širine *L* in dolžine *D*, bo imel volumen $V = \frac{L^2 D}{2\pi}$. Dokazala sem tudi, da če bi imela na voljo le pravokotno, trikotno in enakokrako-trapezno obliko profila žleba, bi bila najboljša izbira oblika enakokrakega trapeza. Enakokraki trapez se namreč tudi najbolj "prilega" ploščini polkroga izmed vseh treh oblik, in lahko zato po njem odteče največ vode. Če bi lahko izbrala enakostranični *n*-kotnik za profil žleba, bi bil volumen žleba tem večji tem večji bi bil *n* – število stranic.
Večina odtokov, ki jih uporabljamo npr. na strehah, v kanalizacijah ali razbremenilnikih hudourniških voda, je polkrožnih ali trapeznih oblik, zato da z najmanj porabljenega materiala (npr. pločevina, beton, plastika, les, kamen …) dobimo odtoke, katerih preseki imajo kar se da velike ploščine, da lahko odteče največ tekočine. Na ta način se tudi stroški pri sami gradnji zmanjšajo (saj se porabi manj materiala). Vse to se vidi iz izračunov v moji preiskovalni nalogi, katerih rezultate še enkrat podajam v zaključnem sklepu:

Žleb širine *L* in dolžine *D*:

- Volumen pravokotnega žleba:
  V= $\frac{L^2 D}{8}$

- Volumen trikotnega žleba:
  V= $\frac{L^2 D}{8}$

- Volumen enakokrak-trapeznega žleba je:
  V = $\frac{\sqrt{3} L^2 D}{12}$

- Volumen polkrožnega žleba:
  V= $\frac{L^2 D}{2\pi}$

$\frac{V_{polkrog}}{V_{pravkotnik\ in\ trikotnik}} = \frac{L^2 D}{2\pi} : \frac{L^2 D}{8} = \frac{4}{\pi} = 1{,}273$ → Po polkrožnem žlebu odteče skoraj 30 % več vode, kot po pravokotnem in trikotnem žlebu.

Umetni hudourniški in rečni kanali imajo večinoma trapezno obliko, ker je takšno obliko lažje graditi in čistiti.
Malo za hec, malo za res: V realnem življenju problem žlebov ni njihova oblika, ampak njihovo čiščenje…

6 VIRI

Bandle, C. (2017). Dido's Problem and its Impact on Modern Mathematics. Notices of the American Mathematical Society, 64 (9), str. 980–984. Pridobljeno 27. 04. 2020, s https://www.ams.org/publications/journals/notices/201709/rnoti-p980.pdf

Mathematical Garden. (2008). Pridobljeno 27. 04. 2020, s https://mathematicalgarden.wordpress.com/2008/12/21/the-problem-of-dido/

Stumbling Robot. (b.d.). Pridobljeno 20. 04. 2020, s http://www.stumblingrobot.com/2015/10/07/find-the-largest-trapezoid-that-can-be-inscribed-in-a-semicircle/

Pridobljeno 20. 04. 2020, s https://ucilnica.fri.uni-lj.si/pluginfile.php/5303/mod_page/content/78/mat2fvs.pdf

Pridobljeno 20. 04. 2020, s http://forum.kvarkadabra.net/viewtopic.php?t=2192

Pridobljeno 20. 04. 2020, s https://de.wikipedia.org/wiki/Dido_(Mythologie)

Pridobljeno 20. 04. 2020, s https://en.wikipedia.org/wiki/Dido