RELATIVNOST IN VESOLJE, NEKAJ PRIMEROV

POZOR – V IZDELAVI (ZV)!!! – *2016-03-28/2016-04-03/2016-09-18/2016-09-23/2016-09-26/2017-11-27/2017-12-04/2017-12-26/2017-12-27/2017-12-28/2017-12-30/2018-01-01/2018-01-14/2018-01-16/2018-04-13/2018-05-03/2023-04-04/2023-04-16/2023-05-11*

UVOD

ENTROPIJA, VESOLJE IN ČAS

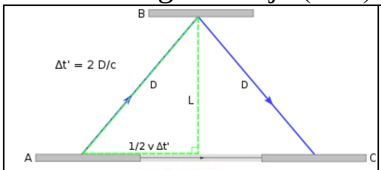
Preden se dotaknemo relativnosti in vesolja, se pogovorimo o času in podajmo nekaj presenetljivih izračunov. Te izračune bomo po uvodu tudi utemeljili.

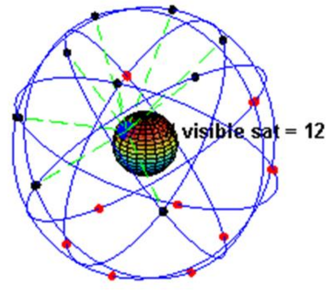
Kaj je čas? Med študijem nas na nobenem izpitu ne vprašajo (ali zelo redko) – kaj je čas, a VENDAR s tem pojmom rutinsko rešujemo probleme, naloge, ... že dolgih XY let, stoletij, ... **Preglejmo** nekaj »definicij« časa:

Čas (t – lat. *tempus*) je **v fiziki** količina, ki kaže na to, da si dogodki sledijo drug drugemu. **Aristotel:** »Čas je samo število gibanj (arithmos) glede na preteklost in prihodnost.« **Budistična filozofija**: »Svet, ki se ustvarja iz trenutka v trenutek, čas je iluzija..« **Antična Grčija:** »Kronos je za antične Grke predstavljal linearen, merljiv čas - dogodki v njem so zgodovinski.« **Srednji vek:** »Čas je obravnaval kot nekaj linearnega, njegov začetek pa so videli v stvarjenju sveta.« (Sveti Avguštin je čas razlagal kot gibljivo podobo negibne večnosti.). **Novi vek**: »Časa kot absolutna količina, z izumom ure smo pridobili zmožnost enotnega merjenja časa.«

Čas v posebni in splošni teoriji relativnosti

Minevanje časa, kot ga po navadi zaznavamo ljudje, je subjektiven občutek – ki pa ima zagotovo osnove v naravnem dogajanju. Objektivni poskusi, meritve in rezultati pri velikih hitrostih, ki potrjujejo posebno teorijo relativnosti (eksperimenti z mioni, dogodki v odvisnosti od hitrosti in smeri gibanja opazovalcev, kar naenkrat niso sočasni, izmerimo različne dolžine, ...) kažejo na smiselnost definicije štirirazsežnega prostora-časa. Tudi gravitacija (teža) vpliva na merjenje časa.





Posebna teorija rel. Če prvi sistem »miruje« (glede na opazovalca) drugi pa potuje s hitrostjo **v**, velja da čas gibajočega sistema teče počasneje:

$$t_{mirujočega} = t_{gibajočega}/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

Zato bi naj ure na GPS satelitih zaostajale za urami na Zemlji, a na čas vpliva še gravitacija, zato ure na satelitih tečejo hitreje kot na Zemlji. Sledi povezava.

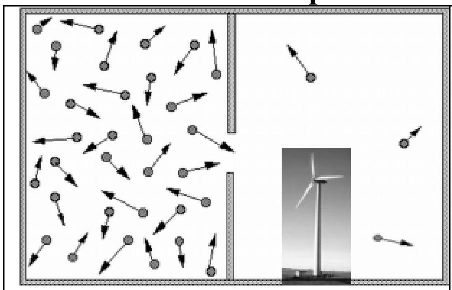
Splošna teorija rel. Če smo v gravitacijskem polju, čas (t) teče počasneje, velja:

$$t = t'/(1-2 \cdot G \cdot M/(R^*c^2))^{1/2}$$

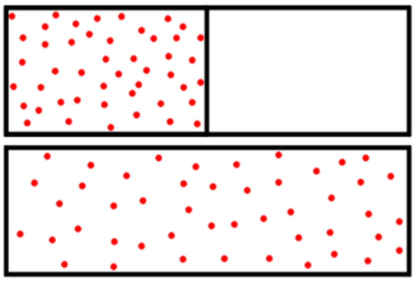
Težnost upočasnjuje ure. Kjer je potencialna energija višja (Wp = - GmM/r), čas tg teče hitreje (zato ure na satelitih tečejo hitreje). ***C*** *je hitrost svetlobe,* ***R*** *je razdalja od masnega središča do opazovalca,* ***G*** *je gravitacijska konstanta, M je masa neb. telesa.* Na GPS sistem vplivajo še atmosfera, anomalije v orbiti, itn.

V resnici je bolj pravilno oba prispevka zapisati skupaj: $t = t'/(1 - 2GM/(c^2R) - v^2/c^2)^{1/2}$

ENTROPIJA »S« – »puščica časa« ('*entropía'* – pomeni pretvorbo) – kaj je entropija?



Obstaja več (podobnih) definicij entropije. Zelo povedna je definicija – da entropija opisuje zmožnost sistema za x »pretvorbe« (tok toplote, delo). Pri nepovratnih (ireverzibilnih) procesih se entropija (S) zmeraj veča, pri reverzibilnih se ohranja (recimo idealni prožni trki ...). Večja je entropija, manj dela lahko sistem opravlja. Entropija kot mera za '(ne)red'. Spremembo entropije **dS** termodinamskega sistema pri reverzibilni spremembi, opravljeni pri stalni temperaturi, je 1865 Rudolf Clausius določil kot količnik med izmenjano toploto (**dQ**) in temperaturo (**T**):

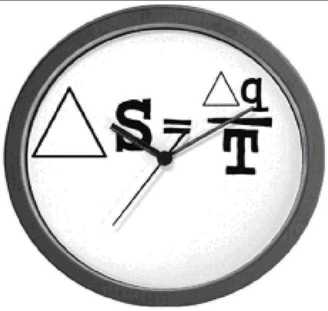


$$dS = \frac{dQ}{T}$$

V statistični mehaniki (definira Stefanov učenec Ludwig Boltzmann) je entropija (**S**) sistema določena z naravnim logaritmom števila mikroskopskih stanj, ki ustrezajo makroskopskemu stanju sistema, seveda z makroskopskimi omejitvami (npr. skupno energijo E):
S = k$_B$*lnP.

Povezava med entropijo in časom

Ali čas merimo zgolj s periodičnimi spremembami (**vrtenje, gibanje planetov, nihanje**, ...)? Ni nujno – lahko ga merimo recimo s stanjem nekega sistema, recimo z razvojno fazo določene zvezde – ali načeloma kar s stanjem vesolja kot takega – z velikostjo vesolja (**s časom se veča $R=R_o(t/t_o)^{2/3}$**), s temperaturo vesolja (**s časom se manjša $T=T_o(t_o/t)^{2/3}$**), oboje je lahko na daljši skali merilo za pretečeni čas, itn. In tukaj se srečamo s pomembnim pojmom iz termodinamike – z entropijo (z možnostjo x »pretvorbe« nekega sistema), ki je na nek način vezana na število mikroskopskih stanj delcev skozi čas, ki se odražajo v makroskopskem stanju sistema, recimo z notranjo energijo (mnogokrat je merilo za notranje stanje kar temperatura) in spremembo le te pri interakciji z okoljem (recimo s toplotnim tokom, vsi poznamo ta občutek, ko nas zebe ali nam postaja vroče). In kje je tukaj povezava s časom? **<u>Entropiji v fiziki nekateri tudi pravijo »puščica časa (smer ali tudi načrt časa)«, je neke vrsta ura, ki nakazuje smer »napredka«</u>** (ta pojem, puščica časa, je za mnoge fizikalno bogokleten). Kaj hočejo v resnici nekateri povedati s tem pojmom? Samo to, da se v zaprtem izoliranem sistemu entropija nikoli ne more zmanjšati – nasprotno, s časom se lahko samo veča (do maksimalne možne). Zelo popularen je recimo primer izoliranega sistema dveh teles z različnima temperaturama, ki bo s časom pripeljal (zaradi prenosa toplote med telesoma) do stanja, ko bosta temperaturi obeh teles zmeraj bližji druga drugi (kinetične energije molekul obeh teles težijo k izenačenju – v povprečju seveda). Ni za pričakovati, da bi se brez posega iz okolice, kdaj spet vzpostavilo začetno stanje (**da bi telesi sami od sebe spet kdaj vzpostavili začetno temperaturno razliko** (t. i. začetni red, da bi se entropija zmanjšala) – čeprav verjetnostni račun celo temu daje neko teoretično možnost ...). **Kaj pa entropija in fenomen življenja?**



Prikupna kombinacija ure (časa) in entropije S.

<u>Postavlja se dilema – ali lahko pojem entropije, recimo zgolj kot termodinamično količino, poenostavljeno apliciramo na celotno vesolje.</u> Pred časom se je zdelo, da ja - danes pa je nekaj dvomov, oziroma previdnosti, dopolnitev – in iz obeh smeri izhajata dva, recimo »nekoliko« nasprotujoča zaključka.

<u>Prvi scenarij - toplotna smrt vesolja</u>

Tako se zdi, da je z minevanjem časa zmeraj manj razlik v vesolju (zmeraj manj možnosti za pretvorbe, recimo za izdaten tok toplote, ker se temperaturne razlike med deli vesolja manjšajo). Nekateri temu procesu pravijo tudi toplotna smrt vesolja (idejo je podal **William Thomson** že v letih **1851 - 1862**) – torej se vesolje kot sistem **v neskončnosti bliža temperaturi 0 Kelvinom ('konec časa').**

Drugi scenarij - maksimalna možna entropija vesolja narašča hitreje od toplotne smrti

Oporečniki toplotne smrti vesolja opozarjajo, da je entropijo kot termodinamično količino težko aplicirati na razširjajoče se vesolje. Meritve svetlosti supernov tipa Ia pa kažejo, da se širitev vesolja celo pospešuje (tukaj sta še gostota energije vakuuma in problem makroskopskih kvantnih učinkov). Tako danes mnogi sklepajo celo nasprotno in sicer, **da največja možna entropija vesolja narašča veliko hitreje, kot se nam bliža sama toplotna smrt,** da smo s časom torej zmeraj dlje od toplotne smrti in ne bližje. Temu pojavu rečemo tudi **<u>»entropijska vrzel«</u>** in naj bi se pojavila že ob samem začetku nastanka vesolja. No, spet so možni tudi drugi scenariji, iz katerih izhaja, da se bo rast maksimalne entropije ustavila. Malo zapleteno – pa nič zato – ta pojem še namreč ni prav dobro zaživel, sploh pa ne v slovenski strokovni literaturi. Ponuja pa nek drugačen (nov) pogled na zgodovino in prihodnost vesolja-časa. Recimo - daje nek »optimizem« v perspektivi bodočega razvoja dogodkov ...

Fred Hoyle – njegovo vesolje (materija) zmeraj znova nastaja in odriva galaksije (od tod širjenje po Hoylu) – »je vesolje, ki se ustvarja« in NAJBRŽ pri tem modelu ni težav s toplotno smrtjo ...
Ko smo tako preko različnih definicij pojma časa zašli (recimo) iz »bližnjega« srednjega veka in praške ure, v milijarde let oddaljeno bodočnost, pa se obrnimo še na sedanjost (na čas ki ga živimo). Omenimo morebiti nekaterim manj znano dejstvo, da v deževnem gozdu Amazonke še obstaja ljudstvo, ki ne pozna glagolskih časov (ima skromen jezik, žvižganje, itn, nimajo zgodovine, junakov, religije, ...). To aktualno civilizacijsko protislovje nas pripelje do neke nove-stare uganke, kaj je človek – pripelje nas recimo do fenomena razvoja jezika, komunikacije, kot prvega orodja našega bivanja, do govora kot enega od temeljev civilizacije, seveda tudi do astronomije, znanosti ...

Katere vrste energije poznamo (groba ocena)?

energija Sonca zaradi fuzije (na Zemlji zato posredno ali neposredno deluje: neposredno sevanje s Sonca, veter, vodni krog, energija vodnih tokov, fosilna goriva, lesna masa, ...),
termalna energija,
jedrska energija (razpad atomov, zlivanje atomov), fuzija v fazi razvoja.
Razpolovni čas:

$$\left(-\frac{dN}{N}\right) = \lambda \cdot dt.$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2.$$

Tabela razpolovnih časov za nekatere elemente, izotope.

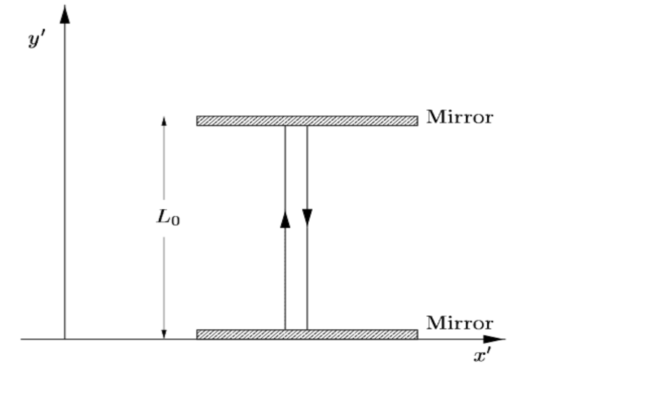
Izotop		Razpolovni čas	Sevanje – aktivnost
^{131}I	jod	8 dni	4.600.000.000.000 Bq/mg
^{137}Cs		30 let	3.300.000.000 Bq/mg
^{239}Pu	plutonij	24.110 let	2.307.900 Bq/mg
^{235}U		703.800.000 let	80 Bq/mg
^{238}U		4.468.000.000 let	12 Bq/mg
^{232}Th	torij	14.050.000.000 let	4 Bq/mg

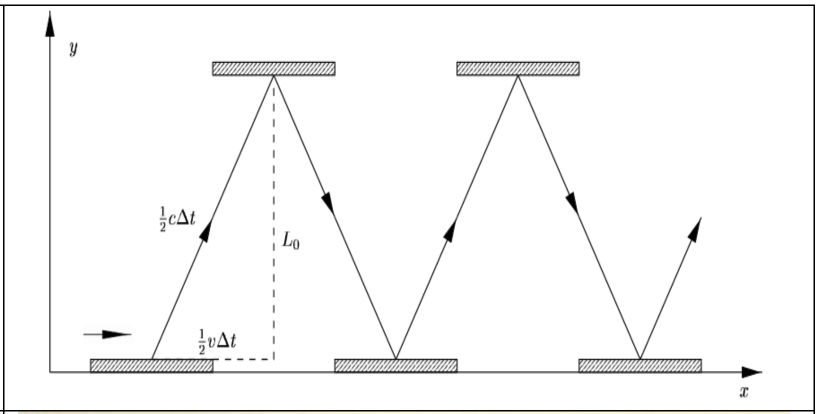
Razpolovni čas **»$t_{1/2}$«** - vrednosti razpolovnih časov so od 10^{-8} s do 10^{24} let, za subatomske delce od 10^{-24} s do 10^{-8} s, za proton je ZGOLJ teoretična ocena 10^{35} let (razpade v pion in pozitron: $p^+ \rightarrow e^+ + \pi^o$ => $\pi^o \rightarrow 2\gamma$).
In kaj bo na koncu z vesoljem ? **Ali bo konec vesolja (časa in prostora), ko bodo razpadli še zadnji delci ...? Energijski zakon bo še zmeraj veljal!? Kaj sledi iz zadnjih domnev, je skrivnost »ČASA«.**

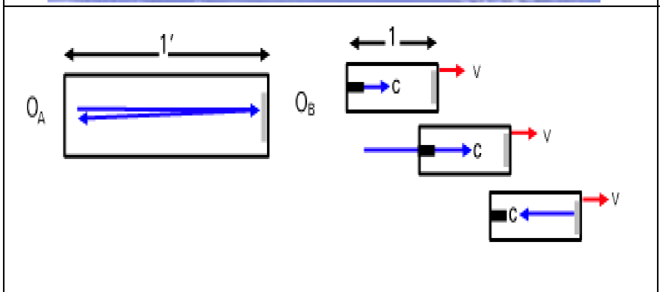
Kaj pa začetek vesolja(?), Heisenbergov princip nedoločenosti $\left[\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}\right]$ **da neko razlago. Začetek vesolja kot kvantni fluktuaciji energije in časa (delci in antidelci – in kje so?).**

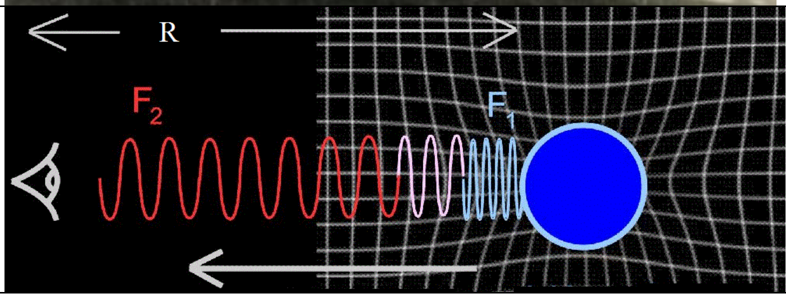
Čas in relativnost

Da se ne bomo že takoj na začetku ustrašili naslova, bomo uvod v relativnost nekoliko poenostavili in izrekli za koga predrzno, oziroma celo napačno misel in sicer – matematični opis relativnosti je na koncu zgolj neke vrste Pitagorov izrek z dodano dimenzijo (kateto) časa pomnoženega s hitrostjo svetlobe (ct). Ker pa Pitagorov izrek vsi poznamo, nam torej vsebina tega prispevka ne bi smela biti tuja ... Da je temu tako, bomo poskušali dokazati v nadaljevanju. No – dosledna slika teorije relativnosti sporoča, da je za opis sveta potrebno uporabiti Riemannovo neevklidsko geometrijo - zaradi gravitacijske ukrivljenosti prostora – a o tem pozneje. Za uvod pa sledi nekaj pomembnih skic pojavov, ki predstavljajo temelj razmišljanja moderne fizike in astronomije – okrog naslednjih nekaj slikic se bo več ali manj vse vrtelo.









Namesto razlag zgornjih slik (te razlage še pridejo), omenimo Einsteinovo najsrečnejšo misel, ki bo naša nit skozi celoten tekst in v bistvu že tudi delna razlaga zgornjih slik.

Einsteinova najsrečnejša misel v življenju.

Albert Einstein je skozi okno svoje pisarne na Patentnem uradu v Bernu opazoval krovca na sosednji strehi (leto 1906).

Pomislil je, kaj bi se zgodilo, če bi možak padel v globino. "Če človek prosto pada, ne čuti teže. Postal sem razburjen. Ta preprosta misel je name naredila globok vtis. Približala me je teoriji gravitacije." Kasneje je Einstein svoj miselni poskus s krovcem označil kot najsrečnejšo misel svojega življenja.

Nič težnosti, nič gibanja. Tudi moderni "krovec", astronavt, prosto pada in zato zanj ni težnosti, poleg tega pa lahko povsem utemeljeno trdi, da miruje. Drugi opazovalci lahko vidijo dogajanje drugače, toda to na astronavtova opažanja in meritve ne vpliva.

Kaj vse torej vpliva na poti človeškega razmišljanja in delovanja!?

Ko že omenjamo čas (bistveni pojem našega trenutka - časa), omenimo da je eden večjih šokov privrel na dan z Lorentzom in Einsteinom, ki sta teoretično dokazala, da je čas zmeraj vezan na hitrost in gravitacijo sistema – to dvoje opisujeta posebna in splošna relativnost, ki sta seveda potrjeni z meritvami in relativnost je, med drugim, tudi temelj pravilnega izračunavanja GPS sistema, satelitskega lociranja položaja na Zemlji. Da bomo bolj konkretni, nakažimo relativnostna prispevka k GPS popravku časa – bolje, usklajevanje časov med »zemljani« in sateliti.

Za uvod, kot dokaz da teorija zmeraj pride prav tudi v realnem življenju, izvedimo izračun vpliva gibanja in gravitacije na tek ur sistema satelitov GPS. Izpeljavo enačb bo sledila pozneje!!!

Zaradi kar hitrega gibanja sistema GPS satelitov na višini 20200 km nad Zemljo (hitrost satelitov je po Keplerju, oz. Newtonu: $v = (G \cdot M/R)^{1/2} = 3.88$ km/s) in s tem efekta posebne relativnosti [faktor spremembe časa je $1/(1-v^2/c^2)^{1/2}$, c = 300000000 m/s = 3 10^8 m/s je hitrost svetlobe], vsak dan ure na GPS satelitih za tv = 0,0000072 s zaostanejo za urami na Zemlji.
Zdi se zanemarljivo, ampak brez upoštevanja te napake, je dnevna napaka lege že 2,2 kilometra in 1.5 m na minuto.
Zaradi razlike v gravitaciji pa je razlika še mnogo večja, efekt je nasproten in ure na satelitih tečejo hitreje za približno 0,0000459 s. Sprememba gravitacije in potek časa sta povezana z enačbo:
[$tg = t/(1-2 \cdot G \cdot M/(R \cdot c^2))^{1/2}$
M je masa Zemlje, R je razdalja od središča Zemlje do satelita 26600000 m ali do opazovalca na Zemlji 6400000 m, G je gravitacijska konstanta].
Neupoštevanje razlike obeh relativnosti, obeh časov (tg - tv = 0,0000459 s - 0,0000072 s = 0.0000386 s) pa že prispeva dnevno napako okrog:
c*(tg - tv) = 12 km.
Račune lahko preverite tudi sami – zanimiva izkušnja. Znanje, ki smo ga uporabili za zadnje izračune, sta v veliki meri sooblikovala, seveda ne sočasno, Kepler in Einstein ... In danes je to vedenje nepogrešljivi del našega vsakdanjega življenja, satelitov, navigacije, komunikacije, ...

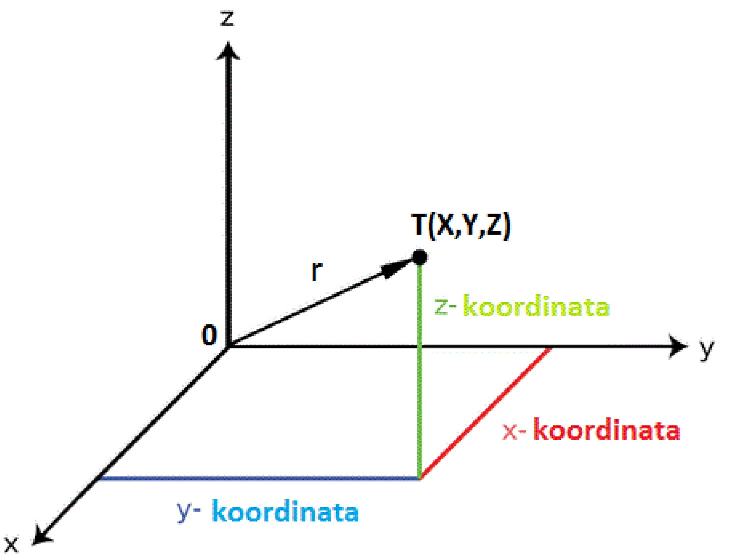
To je bil uvod z nekaterimi izračuni, sedaj pa sledi zelo-zelo preprosta izpeljava vpliva hitrosti 'v'
[$t_{mirujočega} = t_{gibajočega}/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$]
in gravitacije (teže) na merjenje časa
[$t = t'/(1-2 \cdot G \cdot M/(R \cdot c^2))^{1/2}$],
oziroma na energijo fotona
[$E = h \cdot \nu = h \cdot c/\lambda$], da bomo bolje razumeli zgornje račune in splošno enačbo, ki povezuje gravitacijo in rotacijo (gibanje):
$t = t'/(1 - 2 \cdot G \cdot M/(c^2 \cdot R) - v^2/c^2)^{½}$

ZRAVEN PA SE BOMO DOTAKNILI ŠE MNOGIH »NENAVADNIH« POJAVOV.
S hevristično (»domiselno«) metodo bomo zgolj nakazali pot do nekaterih pomembnih rezultatov specialne in splošne teorije relativnosti (uporabljenih recimo pri oceni popravkov časa med sateliti in Zemljo – GPS korekcija). Nekoliko manj se bomo ukvarjali z matematiko (a je ne bomo zanemarili) in več z razumevanjem fenomenov (vpliv gravitacije na svetlobo in

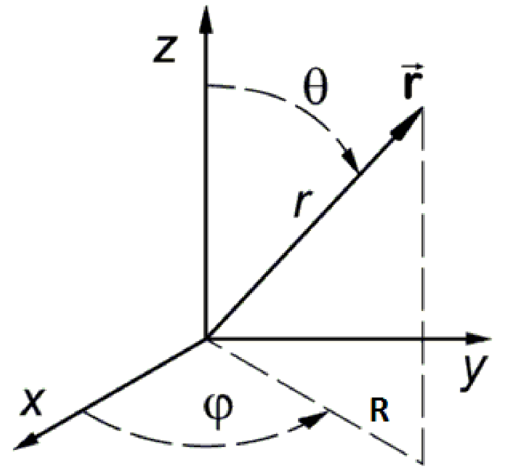
čas ter odvisnost časa od hitrosti sistema) in z minimalnimi koraki iz elementarne fizike ter geometrije, ki nas bodo pripeljali do končnih enačb. No - čisto brez matematičnega opisa narave namreč ni moč načrtovati novih uporab našega vedenja za razvoj novih tehnologij – v dobro vseh nas. Že samo razumevanje naravnih pojavov (obravnavanih tudi v tem tekstu) pa je ogromen prispevek k kulturi našega bivanja, iskanju smisla ...

3D geometrija ali 3D metrika opisa sveta

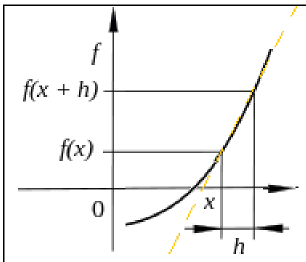
Za opis dogodkov v tridimenzionalnem prostoru nam večinoma zadostuje navaden koordinatni sistem, imenujemo ga tudi kartezični, s tremi pravokotnimi smermi (x, y, z). Od izhodišča 0 do točke T v prostoru vodi krajevni vektor **r** = (x,y,z) z dolžino $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Zaradi praktičnosti velikokrat vpeljemo še cilindrične in sferične koordinate. Vektor lahko zapišemo s puščico nad simbolom $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ ali kot poudarjen zapis simbola, recimo **r** = **r**(x,y,z) ali s podčrtanim simbolom <u>**r**</u> = (x,y,z) – stvar definicije v posameznem tekstu**.** Koordinate kdaj zapišemo tudi vertikalno, glej slike in zapise v tabeli (zadaj so le Pitagorov izrek in kotne funkcije – to so navadna razmerja med stranicami pravokotnega trikotnika IN NIČ VEČ).

<table>
<tr>
<td>


- kartezične koordinate (različni vektorski zapisi):
r = (x,y,z)
$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
- dolžina krajevnega vektorja:
$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

Skalarni produkt dveh vektorjev je:
$\underline{r}_1 * \underline{r}_2 = (x_1, y_1)*(x_2, y_2) = x_1y_1 + x_2y_2$
Če sta vektorja pravokotna, je skalarni produkt 0, primer dveh takih vektorjev (x, 0) in (0, y):
(x, 0)*(0, y) =x0 +0y = 0
</td>
<td>


- cilindrične koordinate:
$$\vec{r} = \vec{r}(R, \varphi, z) = \begin{pmatrix} R \cos\varphi \\ R \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$
- sferične koordinate:
$$\vec{r} = \vec{r}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Odvod:</td>
<td>Integral:</td>
</tr>
</table>



Velja, da je odvod funkcije f(x) strmina tangente (df(x)/dx = f(x)') na dano funkcijo v dani točki x:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Recimo za f(x) = y = x^2 velja, če je dx = h zelo majhna vrednost:

f(x)' = dy/dx = $((x + dx)^2 - x^2)/dx = (x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2)/dx$

dy/dx = $(2xdx + dx^2)/dx$ = 2x + dx, ker gre dx proto 0, velja:

dy/dx = 2x, če y = x^2.

Velja splošno, odvod x^n je $nx^{(n-1)}$,

- odvod, strmina konstante je seveda 0, sa ima vodoravnica strmino 0.

Če imamo funkcijo f=x^3+2, potem je njen odvod df/dx=d(x^3+2)/dx=3x^2+0=3x^2 ali če F=1/u^2 potem je odvod dF/du=-2/u^3) in integral nasprotna funkcija, recimo: ∫x^2dx=x^3/3

Odvod f(u(x)) je enak df/dx = (df/du)(du/dx), recimo:

f = $(x^3 - x)^2 = u^2$, kjer je u = $x^3 - x$ in velja:

df/du = 2u in du/dx = $3x^2 - 1$, rezultat je

df/dx = $2u(3x^2 - 1) = 2(x^3 - x)(3x^2 - 1)$

Še dva primera:

y = $x^{1/4}$ => dy/dx = $(1/4)(1/x^{3/4}) = x^{-3/4}/4$

y = $1/(1-ax^3)^2$ => dy/dx = $6ax^2/(1-ax^3)^3 = 6ax^2(1-ax^3)^{-3}$

Odvod funkcije ϒ = $1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ po v je

dϒ/dv = $v/(c^2(1 - v^2/c^2)^{3/2}) = v\Upsilon^3/c^2$

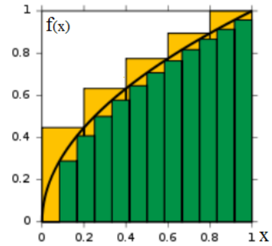
Odvod produkta sestavljene funkcije f = u(x)g(x) je df/dx = (du/dx)g + u(dg/dx), primer:

f = $x^{1/4}/(1-x^3)^2 = (x^{1/4})(1/(1-ax^3)^2)$ = u(x)g(x)

df/dx = $(1/4)(1/x^{3/4})\,(1/(1-ax^3)^2) + (x^{1/4})(6ax^2/(1-ax^3)^3)$

Odvodi kotnih funkcij sin(x), cos(x), tan(x), cot(x), sec(x) = 1/cos(x), csc(x) = 1/sin(x), arcsin(x), arctan(x):

Funkcija	Odvod
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$
$\sec(x)$	$\sec(x)\tan(x)$
$\csc(x)$	$-\csc(x)\cot(x)$
$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{x^2+1}$



Recimo da poznamo funkcijo F(x) = $x^{q+1}/(q+1)$, odvod je:

F(x)'= f(x) =dF(x)/dx = d($x^{q+1}/(q+1)$)/dx = x^q, integral pa je (geometrijsko tudi ploščina pod funkcijo) nasprotna funkcija odvodu. Iz prejšnjega primera velja, da je integral za funkcijo f(x) = x^q enak *F*(*x*) = $x^{q+1}/(q+1)$.

Integral kot vsoto (sumo z znakom ∫) majhnih ploščin f(x)dx zapišemo kot:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

primer

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{1/2}\,dx = F(1) - F(0) = \frac{2}{3}.$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{pri } n \neq -1$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

Odvod in integral eksponentne fun. e^x je enak osnovi:

∫e^xdx = e^x + c

Integracija po delih (per partes).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)] = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}g(x) + f(x)\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)]\mathrm{d}x = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\mathrm{d}x = \int [f'(x)g(x)]\mathrm{d}x + \int [f(x)g'(x)]\mathrm{d}x$$

$$f(x)g(x) = \int [f'(x)g(x)]\mathrm{d}x + \int [f(x)g'(x)]\mathrm{d}x$$

$$\int [f'(x)g(x)]\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int [f(x)g'(x)]\mathrm{d}x$$

$$f(x)g(x)|_a^b = \int_a^b [f'(x)g(x)]\mathrm{d}x + \int_a^b [f(x)g'(x)]\mathrm{d}x$$

sledi:

$$\int_a^b [f'(x)g(x)]\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b [f(x)g'(x)]\mathrm{d}x$$

Primer:

$$\int [\sin(x)\cos(x)]\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \sin(x)_e \qquad g'(x) = \cos(x)_e$$

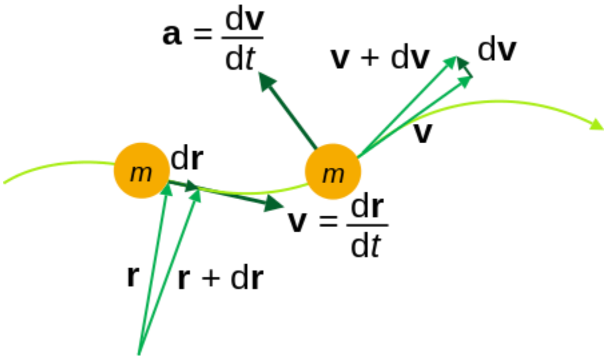
$$\int [f(x)g'(x)]\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int [f'(x)g(x)]\mathrm{d}x$$

$$\int [\sin(x)\cos(x)]\mathrm{d}x = \sin(x)\sin(x) - \int [\cos(x)\sin(x)]\mathrm{d}x$$

$$2\int [\sin(x)\cos(x)]\mathrm{d}x = \sin^2(x)$$

$$\int [\sin(x)\cos(x)]\mathrm{d}x = \frac{\sin^2(x)}{2} + C$$

Za opis dinamike delcev z maso m, si pomagamo s spodnjo sliko:



- hitrost je:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

- pospešek je:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

- rezultanta sil je:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,(m\vec{v})}{\mathrm{d}t},$$

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

- gibalna količina: $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$

- delo (work) je skalarni produkt med silo in potjo:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

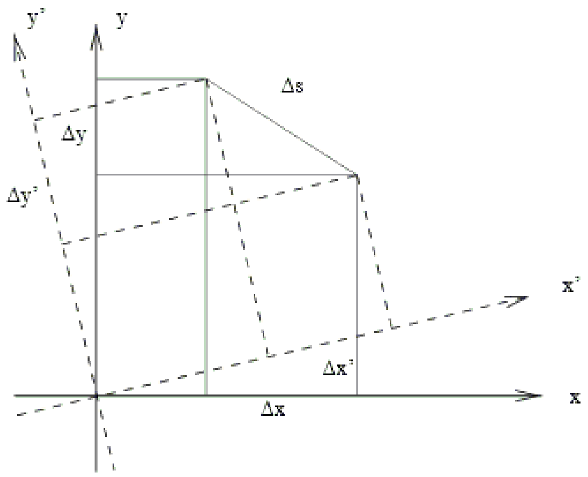
- kinetična energija:

$$E_\mathrm{k} = \tfrac{1}{2}mv^2$$

V klasični mehaniki je dolžina Δs med točkama neodvisna od koordinatnega sistema S in S' in hitrosti opazovalca, velja klasična metrika:

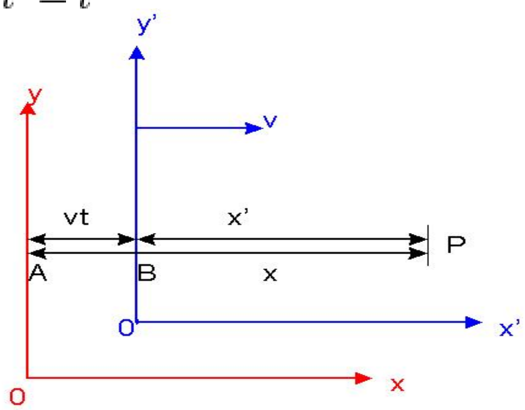
$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$\Delta s^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2$$



Galilejeva transformacija je opis, ki povezuje pojav v danem inercialnem ali nepospešenem opazovalnem sistemu z opisom tega pojava v drugem nepospešenem opazovalnem sistemu, gibajočem se glede na prvega. Galilejeva transformacija velja, dokler je hitrost drugega sistema glede na prvega znatno manjša kot hitrost svetlobe (v/c << 1), torej v okviru klasične mehanike.

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$



Recimo, da merimo razdaljo Lo med točko B in P, kjer sočasno posvetita lučki.

Δx = x2 – x1 = Lo

Δx' = x'2 – x'1 = x2 - vt – (x1-vt) = x2 – x1 = Lo

Δs' = Δs = Lo^2

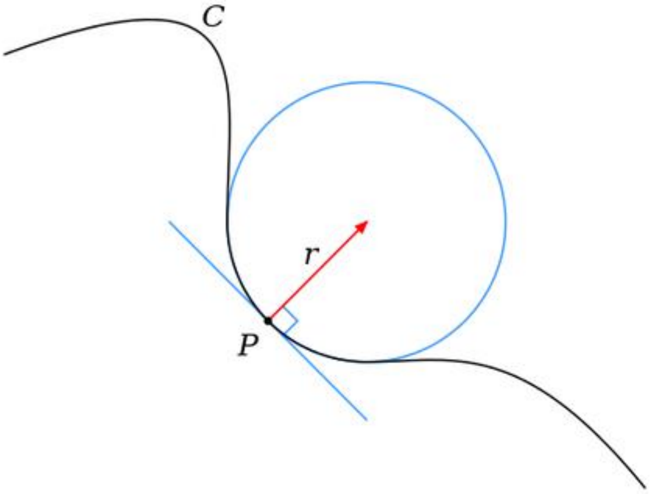
Razdalja – metrika – se torej v vseh nepospešenih

sistemih ohranja, če $v/c << 1$.

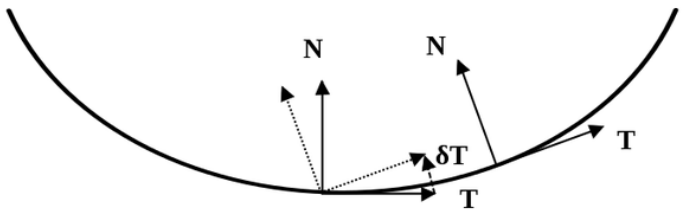
Ukrivljenost - obvezen je naslednji uvod

Kot bomo videli, je pojem ukrivljenosti postal eden od temeljnih postulatov opisa vesolja, pojavov nasploh - razreši mnoge dileme, fenomene, recimo zakaj se pot svetlobe (ki nima mase) pod vplivom masivne zvezde ukrivi. Kot bomo videli, se je vse začelo že s tretjim Keplerjevim zakonom, ki se glasi: *"Kvadrat orbitalne periode planeta je sorazmeren kubu velike polosi elipse."* Pri kroženju (polmer r) okrog masnega središča pa velja zapis t^2/r^3 = konst. ali celo oblika, da je kvocient v^2/r^2 sorazmeren z gostoto objete mase (Hooke, Newton, Einstein so Keplerjeve zakone le nadgradili, a nadgradnja je zahtevala stoletja časa - člen $1/r^2$ je tukaj odločilen za novo mehaniko).

Sedaj pa se posvetimo definiciji ukrivljenosti.



Ukrívljenost (oznaka κ) v matematiki pove koliko geometrijski objekt odstopa od ravnosti, kot se jo pozna pri premici. V ravnini je ukrivljenost skalarna količina, v treh ali več razsežnostih je ukrivljenost določena z vektorjem ukrivljenosti, ki upošteva razen smeri še ostrino ukrivljenosti.



Za zgled naj je parabola z enačbo $y = x^2$. Enačbo se lahko parametrizira $y(t)=(t,t^2)=(x,y)$. Odvodi so:

$x' = 1$, $x'' = 0$, $y' = 2t$, $y'' = 2$.

Iz tega se dobi:

$$\kappa(t) = \left|\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}\right| = \frac{1\cdot 2-(2t)(0)}{(1+(2t)^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$$

Ukrivljenost

Po geometrijskem opisu je ukrivljenost premice enaka nič. Ukrivljenost krožnice ($x^2+y^2=r^2$) je velika, če je polmer krožnice ***r*** majhen in obratno. Torej se lahko zapiše:

$\boldsymbol{K} = 1/r$

Prikazana sta vektorja **T** in **N**, ki skupaj tvorita osnovni sistem. Vektorja sta prikazana v dveh točkah ravninske krivulje, vidi se sprememba vektorja **T** pri prehodu do druge točke, ki je samo premaknjena oblika prvega okvirja. V drugi točki, ki jo opisuje premaknjena oblika prvega okvirja, je nastala sprememba vektorja **T** v velikosti **T: δT'** kjer je δs razdalja med točkama. V limiti bi imel ***d*T/*ds*** enako smer kot **N** in tako ukrivljenost opisuje hitrost vrtenja osnovnega sistema.

Za ravninsko krivuljo, ki je dana parametrično v kartezičnem koordinatnem sistemu kot $y(t)=(x(t),y(t))$, je ukrivljenost enaka:

$$\kappa = \frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

- s črtico so označeni odvodi po parametru *t*. Iz tega se dobi predznačeno ukrivljenost *k*, če odstranimo simbola za absolutno.

To se lahko izrazi na način, ki je neodvisen od koordinatnega sistema:

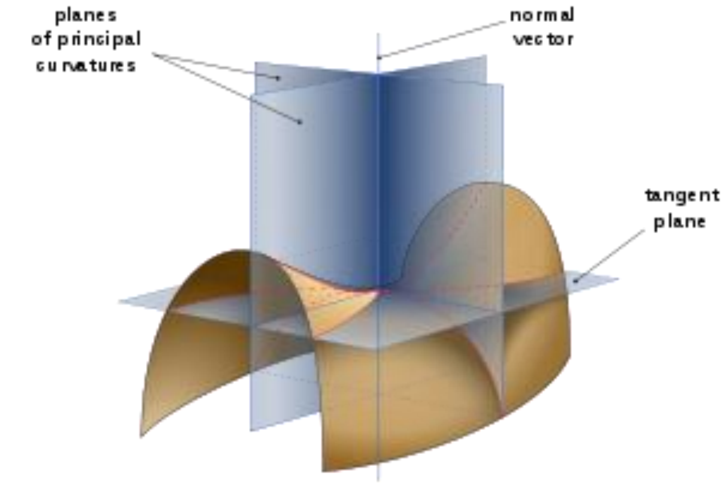
$$k = \frac{\det(\gamma',\gamma'')}{\|\gamma'\|^3}, \quad \kappa = \frac{|\det(\gamma',\gamma'')|}{\|\gamma'\|^3}.$$

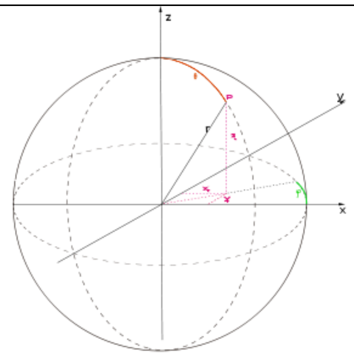
Ukrivljenost ploskve ali Gaussova ukrívljenost (oznaka K) v določeni točki na ploskvi je v diferencialni geometriji produkt glavnih ukrivljenosti κ1 in κ2 v tej točki. To vrsto ukrivljenosti imenujemo tudi notranja ukrivljenost, ker je njena vrednost odvisna samo od načina merjenja razdalj na ploskvi, ne pa od tega kako je izometrično postavljena v prostor. To je tudi vsebina Gaussovega izreka egregium (veličastni izrek). **Ta je pomembna tudi za opis ukrivljenosti prostora v vesolju.**

Gaussovo ukrivljenost določimo z:

$K = \kappa_1\kappa_2 = (1/r_1)(1/r_2)$

kjer sta κ_1 in κ_2 glavni ukrivljenosti. Za sfero ($x^2+y^2+z^2=r^2$) lahko kar uganemo, da ima ukrivljenost:





$K = 1/r^2$

Eden izmed možnih izrazov za Gaussovo ukrivljenost je:

$$K = k_x k_y = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

V splošni teoriji relativnosti označujejo ukrivljenost večinoma s črko **R**, kar je malo zavajajoče, a se bomo že navadili. Imenujemo jo **skalarna ukrivljenost** in je na ploskvi v dveh dimenzijah kar enaka dvakratni Gaussovi ukrivljenosti $\mathbf{R = 2(1/r_1)(1/r_2)}$, za sfero torej velja $\mathbf{R = 2K = 2/r^2}$.

Poglejmo – zakaj omenjena metrika odpove pri večjih hitrostih in pod vplivom gravitacije – teže. Zakaj se dolžina in čas NE ohranjata? To je fizika Lorentza, Einsteina, Schwarzschilda in mnogih predhodnikov, ki so tlakovali pot k razumevanju dogajanj v vsakdanjem svetu, v vesolju in so tako posredno tlakovali pot k razumevanju nas samih.

Posebna teorija relativnosti

Podaljšanje časa (dilatacija), skrčenje dolžin (kontrakcija), ... pri velikih hitrostih.

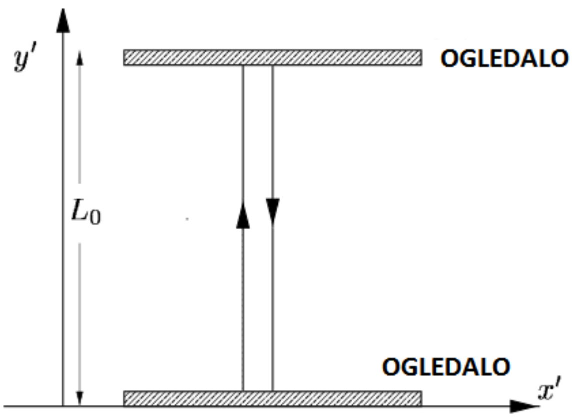
- **Zakaj čas (med dogodkoma) za mirujočega opazovalca teče hitreje kot v gibajočem sistemu, kjer se dogodka zgodita, če je hitrost gibajočega opazovalnega sistema znatna glede na hitrost svetlobe? Torej se gibajoča oseba A teoretično stara počasneje od mirujoče osebe B, vsaj tako trdi 'mirujoča' oseba. A katera oseba v resnici miruje? To je paradoks, saj enako pravi tudi oseba A za osebo B! Kdaj pa pride do različnega staranja - le če oseba A pospešuje in se spet pojemajoče vrne nazaj k opazovalcu B, je dejansko A mlajša od B (pomembno vlogo igra tudi obrat rakete in ne zgolj pospešek, ko se tudi spremeni opazovalni inercialni sistem).**
- **Zakaj se** dolžina gibajoče palice za mirujočega opazovalca skrči?

Kot uvod v razlago zgornjih »nepričakovanih« pojavov najprej naštejmo nekaj splošnih in elementarnih resnic (ki niso zmeraj samoumevne). Recimo, **da so vsi inercialni (nepospešeni) opazovalni sistemi med seboj enakovredni, povsod so zakoni narave enaki. Hitrost svetlobe (c) oziroma hitrost**

elektromagnetnega valovanja v praznem prostoru je v vseh inercialnih opazovalnih sistemih konstantna. Da morajo vse meritve upoštevati končno hitrost svetlobe (elektromagnetnega valovanja) – svet, ki ga zaznavamo, je torej bistveno določen s hitrostjo svetlobe.
Iz povedanega sledi nekaj pomembnih zaključkov, ki pa so opazni le, če je hitrost (v) sistema znatna v primerjavi s hitrostjo (c) svetlobe, a še zmeraj manjša od same hitrosti svetlobe. Na tem mestu je potrebno še enkrat posebej poudariti, da je zgornja hitrost za pošiljanje energije omejena s hitrostjo svetlobe (c). V vesolju sicer lahko zaznamo premike hitrejše od svetlobe, a to so relativni premiki – za pojavom stoji širjenje vesolja; pa še kje se da izmeriti pojave, kjer so hitrosti večje od potovanja svetlobe, recimo gibanje sence planeta, itn – a nikoli to ni hitrost s katero bi pošiljali informacije, energijo, transportirali neko telo ... Veliko se govori o kvantni teleportaciji (recimo, ko dva fotona, ki sta bila nekoč blizu, kvantno vplivata drug na drugega tudi na večji razdalji ...), a to še ni rešitev naše želje, saj se sama fotona ne moreta oddaljiti (na neko večjo razdaljo) hitreje od svetlobe. Je pa to upanje za kvantne računalnike. A vrnimo se k posebni teoriji relativnosti.

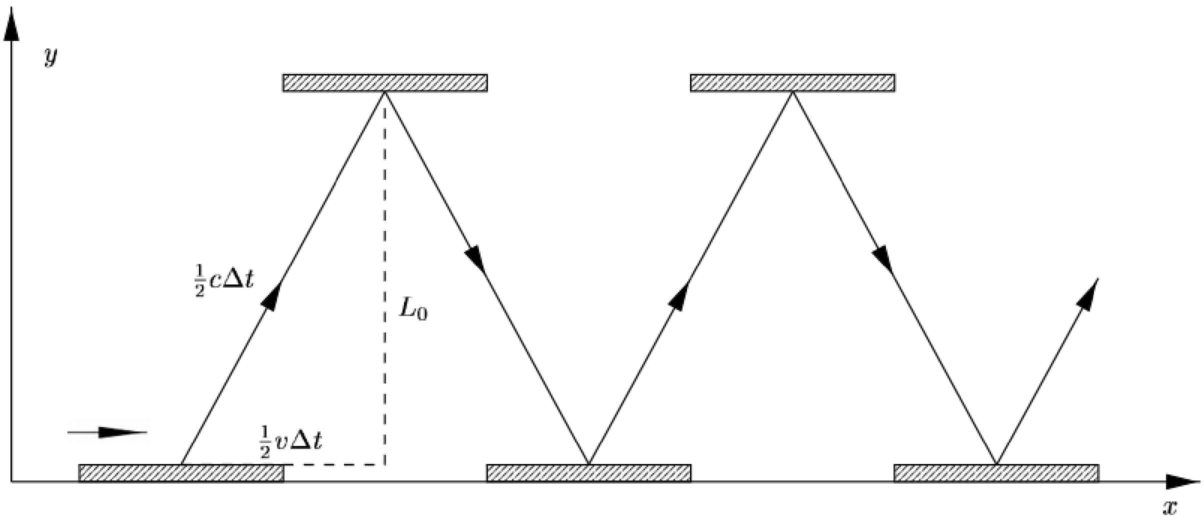
Podaljšanje časa (dilatacija)

Upoštevajmo povedano in naredimo eksperiment z dvema opazovalcema, prvi naj miruje, drugi pa naj potuje (avto, vlak, ...) in izseva svetlobo, ki se mu odbije nazaj od zrcalnega stropa.
Predstavljajmo si torej opazovalca v vozilu s hitrostjo (v), ki meri čas (Δt') med izsevom svetlobe in njeno ponovno detekcijo (zaznavo po odboju od zrcala na stropu vozila na višini Lo) in opazovalca, ki miruje ter opazuje gibajoči se sistem in meri čas (Δt) med dogodkoma izseva in ponovne zaznave svetlobe. Če je hitrost (v) vozila majhna v primerjavi s hitrostjo svetlobe (c), sta čas Δt in Δt' enaka, če pa je hitrost vozila primerljiva s svetlobno, pa sledi veliko presenečenje – izpeljali bomo Lorentzov člen (faktor) **$\Upsilon = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$**, ki povezuje čas t in t' in sicer velja: $\Delta t = \Delta t'/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$.



Opazovalec, ki se premika v vozilu z zrcalom na stropu višine Lo, zazna navpično gibanje svetlobe in temu primerno izmeri čas, ki se izračuna po preprosti povezavi - čas ponovne zaznave svetlobe je kar opravljena pot (2Lo – pot do stropa in nazaj) deljena s hitrostjo svetlobe:

$$\Delta t' = 2L_0/c$$



Ta ki miruje in gleda od zunaj izsev in detekcijo odbite svetlobe pa opazi, da žarek potuje poševno (saj se je vozilo premaknilo za vΔt). Ker je v vakuumu hitrost svetlobe neodvisna od tega, kako hitro potuje vir, ki je svetlobo oddal (načelo invariantnosti svetlobe), velja da je pot D do stropa dolga kar cΔt/2 (hitrost svetlobe krat polovični čas), enako velja po odboju. Iz slike razberemo geometrijo dogodka, kjer opazimo pravokotni trikotnik s hipotenuzo D = cΔt/2 in katetama Lo in vΔt/2. Iz Pitagorovega izreka izpeljemo povezavo med časom Δt, hitrostjo svetlobe (c) in hitrostjo vozila (v), namesto Lo pa vstavimo čas Δt' = 2Lo/c:

$$\left(\frac{1}{2}c\Delta t\right)^2 = L_0^2 + \left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2$$

$$\Delta t = \gamma\frac{2L_0}{c}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t'}$$

Tako smo izpeljali povezavo med časoma v dveh sistemih, ki se relativno gibljeta. Ta zamik časa opazimo pri hitrostih (v), ki so primerljive s svetlobno hitrostjo (c). Zadnji izraz podaja izjemno pomembno povezavo med časoma v dveh sistemih.

Velikokrat čas t' označujemo s simbolom tau **τ** in ga imenujemo **lastni čas (proper time)** – to je čas, ki ga meri mirujoča ura v koordinatnem sistemu dogodka, oziroma ura, ki sledi poti, ura na svetovnici (**svetovnica je pot v prostor-času**). Te pojme bomo še srečevali in jih bomo, upam da zmeraj bolj dojemali, razumeli. Lasten čas **τ** je torej merila **ura v vozilu**, kjer se je žarek izseval do ogledala na stropu vozila in nazaj. Danes torej večinoma uporabljamo spodnjo zvezo med časoma v dveh opazovalnih sistemih.

dt = γdτ

Čas **t** pa imenujemo tudi kar koordinatni čas. V nadaljevanju bomo v posebni teoriji relativnosti za lasten čas še zmeraj uporabljali kar oznako t'. Prednost oznake **τ** je, da jo enostavno ločimo od časa t in je zato dojemanje matematičnega opisa nekega dogodka hitrejše in nedvoumno. A iz zgodovinskih razlogov bomo večinoma ostali pri oznaki t'.
Omenimo samo še neke vrste paradoks, zanimivo posledico podaljšanja časa - če bi se gibali s hitrostjo svetlobe (kar seveda za masni delec ni mogoče). Torej, če bi potovali s hitrostjo svetlobe v=c, bi nam čas sploh ne tekel, saj velja **$\tau = t(1-c^2/c^2) = t*0 = 0$;**

Še glede zapisa dt ali Δt, oziroma v čem je razlika med znakoma d in Δ, oba pomenita nek interval, razliko. V primerih, ko imamo linearne spremembe, enakomerne hitrosti, se lahko uporablja znak za poljubno razliko Δ, v primeru neenakomernih hitrosti pa znak d, ki v limiti pomeni neskončno malo spremembo, interval.

Skrčenje dolžin (kontrakcija)

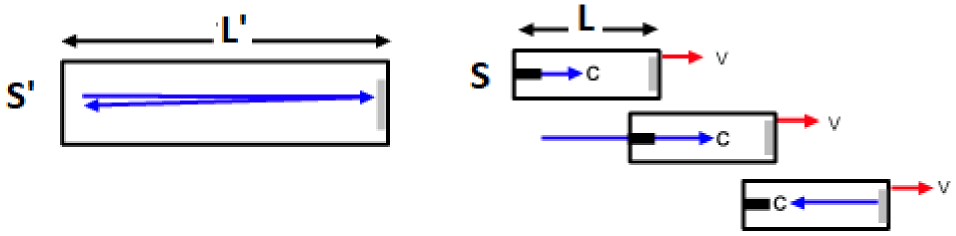
Dolžina gibajoče palice L' se za mirujočega opazovalca skrči na L, velja:

$L = L'/\Upsilon$

Seveda lahko zapišemo zadnji izraz tudi z drugimi simboli, recimo s standardno spremenljivko, z notacijo x:

$x = x'/\Upsilon$

Fenomen relativnega skrajšanja merjene dolžine izpeljimo s pomočjo slik in razmisleka o relevantnti metodi merjenja dolžin, razdalj (merjenje razdalj se zdi samoumevno, pa ni – sploh pri hitrostih [v], ki so primerljive s svetlobno hitrostjo [c]). L' je lastna dolžina palice merjena v sistemu, kjer opazovalec in palica mirujeta.



Metoda merjenja dolžine palice (razdalj) naj spet temelji na oddanem, nato odbitem in (spet) prejetem žarku svetlobe (velja: $L' = ct'/2$, če palica in opazovalec drug glede na drugega mirujeta). Kako pa tako merjenje (dolžino) vidi nekdo, glede na katerega se palica giblje?

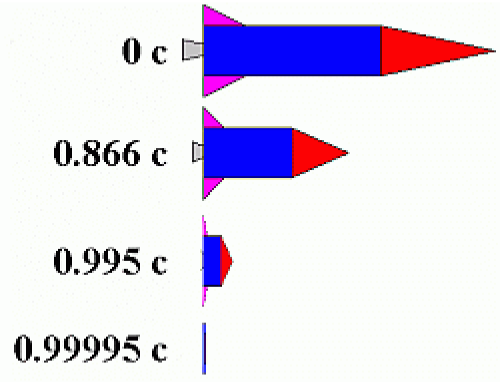
Naj torej sistem S' potuje s hitrostjo v. V njem je tudi palica dolžine L' z zrcalom na koncu. Prvi opazovalec, torej v sistemu S', pošlje iz začetka palice žarek proti zrcalu na drugem koncu palice dolžine L' in počaka, da se odbiti žarek vrne v izhodišče. Kako pa vidi dogodke drug opazovalec v sistemu S, ki recimo miruje glede na prvega opazovalec v sistemu S'. Kot smo že omenili, v sistemu S', skupaj s katerim palica potuje, izmeri prvi opazovalec čas t' povratka žarka; zagotovo velja $t' = 2L'/c$ (zanj palica miruje). Tudi drugi opazovalec bo izmeril čas vrnitve žarka, označimo ga s t (brez črtice). Iz tega časa bo določil dolžino L (brez črtice). Seveda pa zunanji opazovalec tudi opazi, da se palica premika, in da bo zato oddani žarek dohitel zrcalo nekoliko pozneje, saj je relativna hitrost žarka pri lovljenju zrcala c-v, pri odboju pa c+v (glej sliko). Čas t do povratka žarka je torej $\mathbf{t = L/(c\text{-}v) + L/(c\text{+}v)}$ $= L2c/(c^2 - v^2)$. Ker pa smo že v prvem koraku izpeljali povezavo med časoma v gibajočem in mirujočem sistemu, jo tudi uporabimo, velja $t = \Upsilon \cdot t' = \Upsilon \cdot 2 \cdot L'/c$, iz česar sledi:

$\Upsilon \cdot 2 \cdot L'/c = L \cdot 2 \cdot c/(c^2 - v^2)$,

- oziroma $\Upsilon \cdot L' = L \cdot c^2/(c^2 - v^2) = L/(1 - v^2/c^2) = L \cdot \Upsilon^2$. Iz zadnjega izraza izhaja, da je izmerjena dolžina palice L (za opazovalca, ki miruje glede na gibajočo palico) krajša od dolžine L', ki je izmerjena v sistemu v katerem palica miruje (v našem primeru se giblje skupaj s prvim opazovalcem in zato zanj miruje). Končni rezultat za izmerjeno dolžino premikajoče palice je:

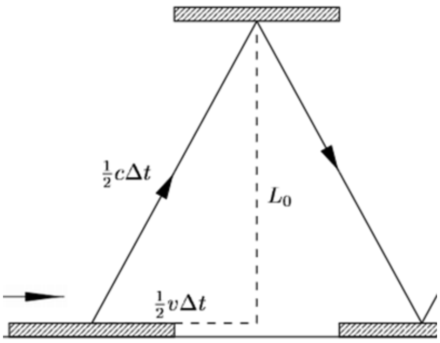
$$L = L'/\Upsilon = L'(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

Tukaj se postavlja nekaj dilem, recimo ali ne bi razdalj merili še na kak drug način? A pri gibajočem telesu (ali mirujočem) nam ostane edina relevantna metoda preko svetlobe. Tudi ko po domače z navadnim metrom merimo neko dolžino, je zadaj »le« svetloba, ki od objekta in metra prihaja v naši očesi. Posebna teorija relativnosti je to samoumevno dejstvo le dopolnila s pojavi, ki izhajajo iz meritev pri večjih hitrostih – kar pa seveda ni vsakdanja izkušnja.



Nazorna slika - kako vidijo gibajočo raketo opazovalci. Pri hitrosti rakete 0.995 svetlobne, je raketa za opazovalca praktično še zgolj leteča skleda.

Sedaj naenkrat opazimo, da stara trirazsežna metrika (x,y,z) klasičnega trirazsežnega prostora (3D) ne velja. Zakaj? Ker smo pri velikih hitrostih spoznali, da se dolžina nekega telesa glede na različni opazovalni sistem ne ohranja, tudi čas ni več absoluten. Stara metrika (staro merjenje) je torej odpovedala. Ali je mogoče nekako dograditi naš opis sveta z novo metriko na način, da se bodo »razdalje« v novi metriki (bolje metrike) vseeno ohranjale? Trirazsežni prostor nam te želje, seveda pri višjih hitrostih primerljivih s hitrostjo svetlobe (c), ne omogoča. Kako bi torej utemeljili novo metriko? Spet izhajamo iz uvodnega primera z opazovalcema - prvi naj miruje, drugi pa potuje in izseva svetlobo, ki se mu odbije nazaj od zrcalnega stropa. Opisujeta torej isti dogodek in izmerita različna časa in različna kraja dogodka – razdaljo med njima. Zapišimo še enkrat Pitagorov izrek - geometrijo dogodka.



$(c\Delta t/2)^2 = L^2_o + (v\Delta t/2)^2 = (c\Delta t'/2)^2 + (v\Delta t/2)^2$

Po preoblikovanju enačbe, ko na eni strani ohranimo **videnje dogodka v gibajočem sistemu**, na drugi strani pa **videnje zunanjega opazovalca**, dobimo: $-(c\Delta t')^2 = -(c\Delta t)^2 + (v\Delta t)^2$

Ker je $v\Delta t = \Delta x$ velja:

$$\mathbf{-\,c^2\Delta t'^2 = -\,c^2\Delta t^2 + \Delta x^2}$$

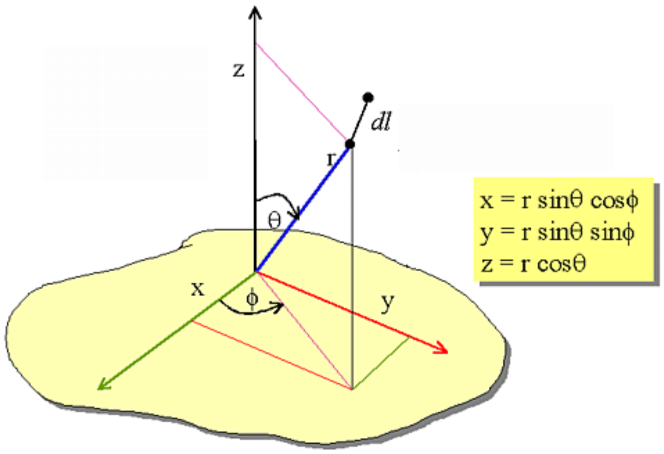
Zadnji zapis je vreden vse pozornosti – je sicer preinterpretiran zgolj na dogodek izsevanja in detekcije žarka (v časih Δt in $\Delta t'$, za razdaljo med dogodkoma na x in x' osi, saj sta začetna in končna koordinata y in y' enaki, enako z in z'). A iz zgornjega zapisa lahko sklepamo na splošno veljavno povezavo. Na desni imamo klasični člen trirazsežnega prostora – to je X komponenta krajevnega vektorja R = (X, Y, Z) in člen ($c\Delta t$). Na levi pa samo člen ($c\Delta t'$), ker je za opazovalca v vozilu člen $\Delta x'^2$ enak 0 (žarek se namreč za opazovalca v vozilu po odboju vrne v isto točko $x'_1 = x'_2$). Ali je to torej zveza, nova metrika, ki jo iščemo? **JA – to je zapis nove metrike, vključuje tako različne koordinate, kot različen čas.**
V bistvu smo tako vpeljali četrto dimenzijo, produkt med svetlobno hitrostjo in časom (ct).

Če ponovimo in se hkrati še enkrat vprašamo - zakaj vpeljati (dodati) k dimenziji prostora še časovno komponento (ct)? Odgovor sta pokazala »preprosta« eksperimenta o relativnosti časa in dolžine - ter želja po opisu sveta, kjer nek dogodek – recimo

razdalja med dogodkoma - ali meritev same dolžine, nista odvisna od koordinatnega sistema. Tako smo vpeljali posebno (specialno) teorijo relativnosti.

Še opomba. Od sedaj naprej bomo večinoma namesto poljubne razlike Δ (recimo Δx v razdalji) uporabljali diferencialni zapis 'd' (recimo dx), ki pomeni da gre razlika (dx) v limiti proti 0. Srečali se bomo namreč tudi z nelinearnimi primeri, sferičnimi koordinatami, itn.

Pravkar vpeljana posebna (specialna) teorija relativnosti ne upošteva gravitacije – pravimo da je čas-prostor »RAVEN«. To izrazimo s štirirazsežno metriko – z izrazom za merjenje razdalj v prostor-času (ds). Kaj to pomeni?



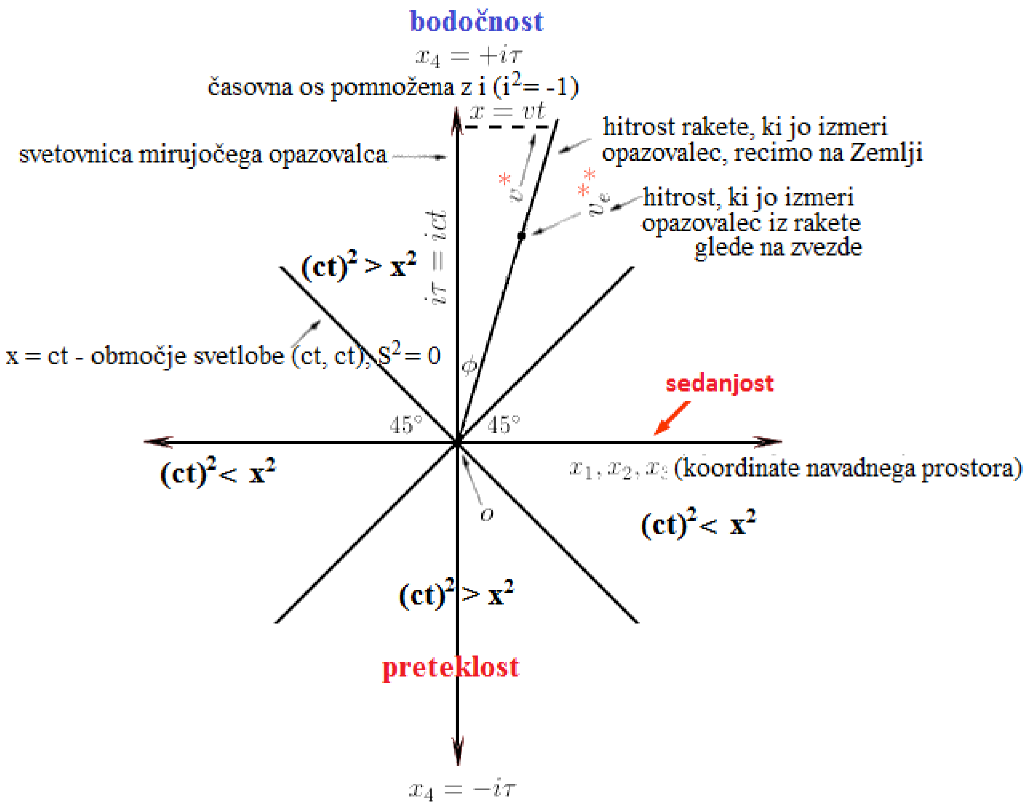
$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

$\mathbf{dr}\cdot\mathbf{dr} = dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

V klasičnem prostoru treh dimenzij velja, da je razdalja dl^2 med točkama skalarni produkt vektorske razlike $\mathbf{dr}\cdot\mathbf{dr} = dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, glej sliko. Izkazalo se je (tudi iz navedenih primerov), da je smiselno vpeljati še četrto dimenzijo, ki povezuje čas (in hitrost svetlobe) s prostorom v nov štirirazsežni prostor-čas. Tako poenostavimo opis dogodkov med različnimi opazovalnimi sistemi, saj vemo, da čas ni absoluten ampak je vezan na relativno hitrost med sistemi, enako velja za merjenje dolžin. Pa še enemu pogoju smo zadostili, kot pravi eden izmed postulatov relativnosti, da so vsi opazovalni sistemi med seboj enakovredni (povsod so zakoni narave enaki) in sicer, da je opis nekega dogodka v vseh sistemih enakovreden. Klasični opis že takoj pokaže, da je v gibajočem sistemu razdalja med dogodkoma dx' = 0 (naš primer), v mirujočem sistemu pa je dx = vdt. To sicer lahko razumemo, a v klasičnem opisu tudi privzamemo, da je čas absoluten. Vemo pa, da to ni res in z novo metriko prostor-časa se da to razliko v metriki odpraviti. V novi metriki naj velja, da je razdalja v prostor-času za vse sisteme enaka: $ds'^2 = ds^2$ - vektorji prostora-časa naj v vseh sistemih ohranijo velikost, primeri sledijo. Prvi korak naj bo, da tridimenzionalnemu vektorju (x,y,z) dodamo še četrto časovno komponento ct (tako razširitev imenujemo prostor Minkowskega). Tak zapis je recimo vektor četverec $\mathbf{X}^\mu$ = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) za opis prostor-časa. Po Einsteinovi interpretaciji je »dogodek« – presečišče lege in časa – edina dejansko merljiva fizikalna količina. Skalarni produkt ($ds^2 = \mathbf{dx}^\mu\cdot\mathbf{dx}^\mu$) ali kar metrika ds^2 se sedaj zapiše kot:

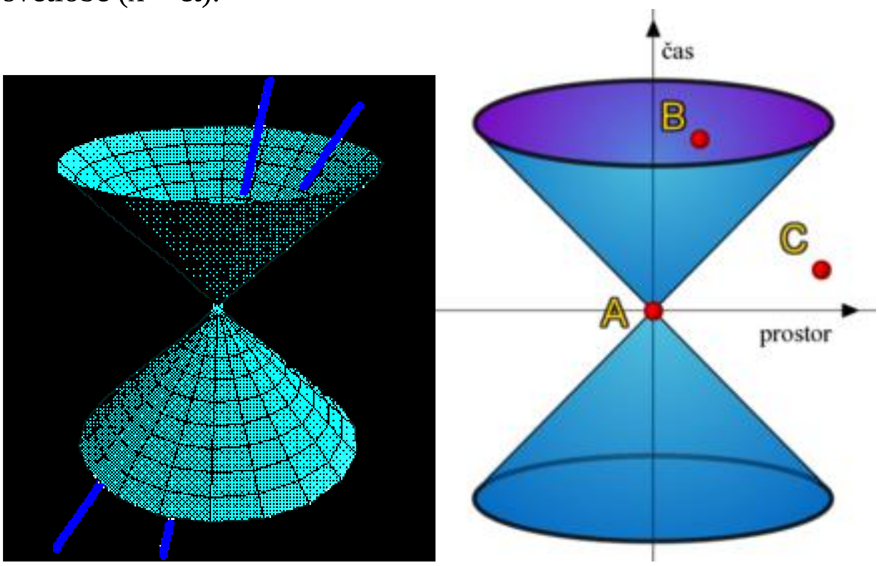
$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Zakaj minus pri časovnem delu razdalje ($-c^2dt^2$), smo pokazali na primeru vpeljave nove metrike ($-c^2\Delta t'^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2$) – in geometrijsko je to »le« Pitagorov izrek.



Zgornja slika kaže eno izmed grafičnih predstavitev štirirazsežnega prostora. Na vodoravni osi je dimenzija klasičnega 3D prostora (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3) = (x^1, x^2, x^3), na vertikali pa produkt hitrosti in časa (ict), pomnožen z imaginarno enoto i, katere kvadrat je minus ena (i^2 = -1) – to je kdaj dobra matematična pomoč pri računanju metrike, razdalj s pomočjo četverca. Prostor-času pravimo tudi prostor Minkowskega in ga na preprost način ponazorimo z zgornjim diagramom. Na njem je podan dogodek potovanja rakete in kako izmeri opazovalec iz Zemlje (ali rakete) hitrosti. Dogodki v realnem svetu se dogajajo znotraj ali na lijaku, stožcu (naklon stožca je 45° => ct/vt = 1, če v=c), ki ima mejo v hitrosti svetlobe (x = ct).

Prostor-času pravimo tudi prostor Minkowskega in ga na preprost način ponazorimo z diagramom, kjer prostor skrčimo v eno dimenzijo (simbolično v 'x', ki je abscisa), čas 't' pa predstavlja ordinata. Na njem je dogodek potovanja rakete in kako izmeri opazovalec iz Zemlje (ali rakete) hitrosti. Dogodki v realnem svetu se dogajajo znotraj ali na lijaku, stožcu (naklon stožca je 45° => ct/vt = 1, če v=c), ki ima mejo v hitrosti svetlobe (x = ct).



Če pogledamo potencialne povezave med A, B in C, lahko iz njih razberemo pogoje za morebitno vzročnost in tudi kdaj to ni mogoče – **to je nezmožnost gibanja hitreje od svetlobe.**

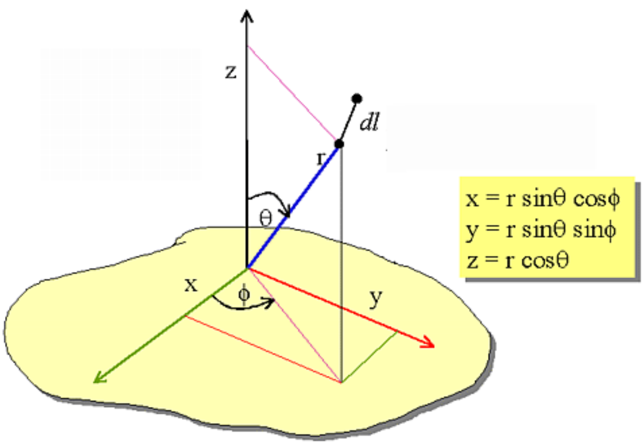
Če pogledamo dogodka A in B, uvidimo da sta vzročna - zakaj. A lahko povzroči B (od A do B lahko potuje recimo določeno vozilo (telo), saj ležita znotraj stožca, kjer je hitrost manjša od hitrosti svetlobe, itn), in če se A zgodi pred B, se to vidi iz vseh opazovalnih sistemov. A in B se lahko zgodita v določenem opazovalnem sistemu celo v isti točki prostora – kot recimo izsevanje svetlobe in odboj nazaj v nekem vozilu, kar zunanji opazovalec vidi kot dogodek tako v različnem času, kot tudi legi. Takemu dogodku (dogodkoma) pravimo, da je **(sta) časovnega tipa** (**razmik med dogodkoma je časovnega tipa, saj** velja $(ct)^2 > x^2$). Dogodka A in C pa nista vzročno povezana, saj bi morala informacija od A do C potovati hitreje od svetlobe, kar pa eksperimenti ne kažejo. Dogodek C se je v prostoru zgodil tako daleč od A in časovno tako blizu (izven stožca ct = x), da velja $(ct)^2 < x^2$, takima dogodkoma pravimo, da sta **krajevnega tipa (razmik med dogodkoma je krajevnega tipa).** Dogodka A in C sta torej neodvisna – ne moreta biti vzročna. Seveda se lahko iz različnih opazovalnih sistemov razbere, da se A zgodi pred C in tudi obratno – kar je še en dokaz, da sta dogodka neodvisna. Kadar pa je ct = x (oziroma $ds^2 = 0$), je **razmik svetlobnega tipa** (informacije pošiljamo s svetlobo) – <u>dogodka ležita na plašču stožca (</u>nekateri ga tudi imenujejo svetlobni stožec).
Oddaljeno (globoko) vesolje spoznavamo zgolj preko dogodkov svetlobnega tipa (sprejemamo in beremo svetlobo oddaljenih galaksij, zvezd, ... in iz teh dogodkov sestavljamo zgodbo razvoja vesolja, galaksij, zvezd, življenja, ...). Gledamo v preteklost, to je spodnji stožec, mi smo v izhodišču, stikališču stožcev preteklosti in bodočnosti. Znotraj Sončevega sistema pa izvajamo tudi dogodke časovnega tipa (misije z raketami, sondami). Seveda si mnogi želijo informacije in potovanja hitrejše od svetlobe – a take dogodke realnost, meritve, izključujejo. Seveda je v vesolju geometrija zaradi gravitacije nekoliko drugačna,

Ali iz izpeljav sledi uvodna teza, želja – da je matematični opis relativnosti na koncu neke vrste Pitagorov izrek z dodano dimenzijo (kateto) časa pomnoženega s hitrostjo svetlobe (ct)? Odgovor je pritrdilen - je JA.

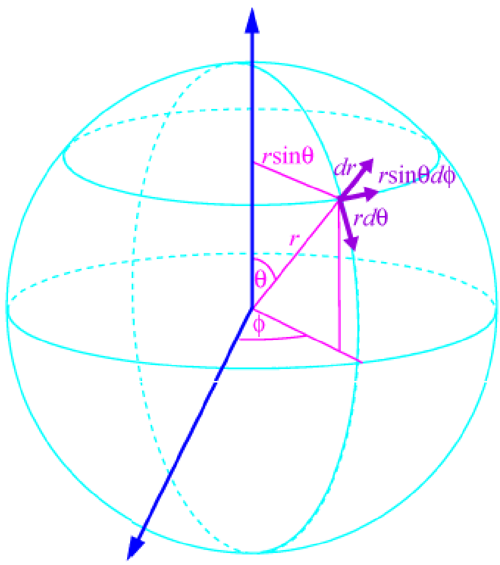
Ali v sferičnih koordinatah:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2\right)$$

Zadnjo metriko dobimo, če v izraz $-c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ vstavimo sferični zapis koordinat:
$x = r \sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r \sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r \cos\vartheta$
$dx = dr \sin\vartheta\cos\varphi + r\, d\vartheta \cos\vartheta\cos\varphi - r\, d\varphi \sin\vartheta\sin\varphi$
$dy = dr \sin\vartheta\sin\varphi + r\, d\vartheta \cos\vartheta\sin\varphi + r\, d\varphi \sin\vartheta\cos\varphi$
$dz = dr \cos\vartheta - r\, d\vartheta \sin\vartheta$
$\mathbf{dS^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)}$
Sledi slika za pomoč.



$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$



Ali tudi bolj domače: $\boldsymbol{dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2}$

V prostor-času pa (kot smo že omenili) velja:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2\right)$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Kjer je

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Zakaj minus pri časovnem delu razdalje ($-c^2dt^2$) = ds^2 in ali je $ds'^2 = ds^2$, smo že pokazali na uvodnem primeru. Opis iz didaktičnih razlogov še enkrat ponovimo. Recimo, če se dogodek v gibajočem sistemu zgodi v isti točki (kot v našem vozilu sprejem odbite svetlobe), je razdalja $dx' = 0$ (tako vidi dogodek opazovalec v vozilu). Sprememba v smereh y in z pa je za oba sistema enaka in je zato sploh ne bomo upoštevali. Ker zahtevamo, da mora biti metrika v obeh sistemih enaka ($ds'^2 = ds^2$), velja da je: $-c^2dt'^2 + 0 = -c^2dt^2 + dx^2$

Leva stran enačbe je opis v gibajočem sistemu, desno pa opis dogodka iz »mirujočega« sistema, kjer velja $dx = vdt$.

Iz česar sledi: $c^2dt'^2 = dt^2(c^2 - dx^2/dt^2) = dt^2(c^2 - v^2) = dt^2c^2(1 - v^2/c^2)$

Okrajšamo še c^2 in dobimo da je $dt'^2 = dt^2(1 - v^2/c^2)$, po korenjenju pa se izlušči znana enačba (ki smo je že izpeljali), ki povezuje čas med mirujočim in gibajočim inercialnim sistemom:

$\mathbf{dt = dt'/(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$

Tako smo (sicer zgolj na praktičnem primeru) pokazali na matematično in fizikalno upravičenost (uporabnost) vpeljave štirirazsežnega prostor-časa, in da je metrika $\boldsymbol{ds = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2}$ za vse sisteme enaka.

Preverimo še metriko za dolžino palice L', ki se giblje skupaj s sistemom s hitrostjo v (palica torej glede na gibajoč sistem miruje, recimo da se z nami pelje v avtu). Spet bomo malo ponavljali iste reči, a gre za utrditev spoznanja, da se metrika v vseh sistemih štirirazsežnega prostor-časa ohranja.

Dogodek naj bo vrnitev odbitega žarka v izhodišče sistem S' (na začetek palice). Velja: $dt' = 2L'/C$, $dt = \Upsilon dt'$, $dx' = 0$, $dx = vdt = v\Upsilon dt'$

$-c^2dt'^2 + dx'^2 = -c^2dt^2 + dx^2$

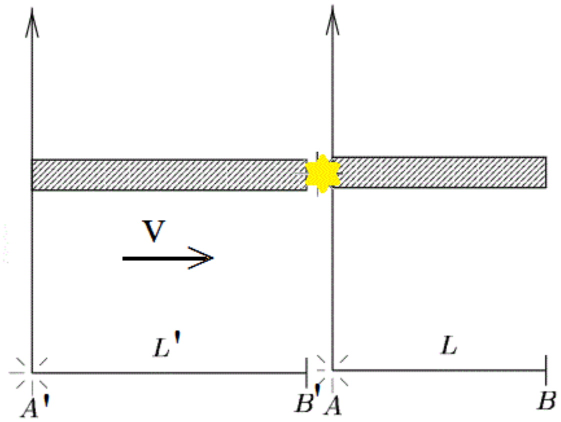
$-c^2dt'^2 + 0 = -c^2(\Upsilon dt')^2 + (v\Upsilon dt')^2$ - iz tega izraza spet dobimo znan Lorenztov člen $\mathbf{\Upsilon = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$

in še malo tavtologije (v pedagoške namene),

$-c^2(2L'/c)^2 = -c^2(\Upsilon 2L'/C)^2 + (v\Upsilon 2L'/C\,')^2$

$-1 = -\Upsilon + (v^2/c^2)\Upsilon^2$ - spet dobimo Lorenztov člen $\mathbf{\Upsilon = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$

- lahko poskusite še s **t =** $L2c/(c^2 - v^2)$ ...



Izvedimo še eno vajo za iskanje transformacije dolžine. Predstavljajmo si, da se levi koordinatni sistem S' bliža sistemu S. Ko se palica L' dotakne sistema S, se sproži na konici blisk, enako se zgodi, ko začetek palice L' sovpade s sistemom S. Blisk se sproži na začetku palice L' – ko točki A' in A sovpadata. Za sistem S' velja, da se prvi blisk sproži ob času t1' = 0 in s koordinato x1' = L', za sistem S velja, da je x1 = 0, t1 = 0 (izhodišče sistema S). Po času t2 = L/v se sproži drugi blisk na začetku palice, ki sovpada z izhodiščem sistema S, zato je x2 = 0. V sistemu S' pa je potekel čas t2' = L'/v. Vstavimo podatke med dogodkoma v metriko.

$-c^2dt'^2 + dx'^2 = -c^2dt^2 + dx^2$

Ker je dt' = L'/v, dx' = Lo, dx = 0 in dt = L/v velja:

$-c^2 (L'/v)^2 + L'^2 = -c^2(L/v)^2 + 0$

$L'^2((c/v)^2 - 1) = L^2(c/v)^2$

$L'^2(c/v)^2 (1 - (v/c)^2) = L^2(c/v)^2$

Iz zadnjega računa brez težav izrazimo že znano povezavo za pretvorbo dolžine:

$L' = L/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = L\Upsilon$

To je še ena vaja za spoznavanje metrike štirirazsežnega prostor-časa.

Če bi palica mirovala zunaj avta pri kolegu, pa bi dobili enak rezultat, a s to razliko, da bi se oznake zamenjale – a zmeraj velja, da je dolžina najdaljša v tistem sistemu, v katerem miruje. Metrika štirirazsežnega prostor-časa torej res deluje.

Vprašajmo se, kaj se zgodi, če se nek sistem giblje s hitrostjo (v) v prostor-času v smeri osi x'. Kako se spreminja metrika v prostor-času, dS^2 = ?

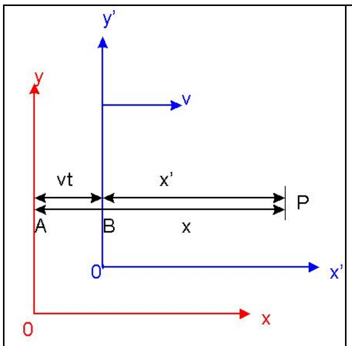
$$ds^2 = -c^2dt'^2 + dx'^2 + dy^2 + dz^2$$

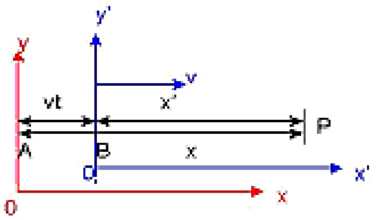
Ker velja:	dS^2 je:
$dx' = \dfrac{dr}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ $dt' = dt\sqrt{1 - \dfrac{v'^2}{c^2}}$	$ds^2 = -c^2(1 - \dfrac{v^2}{c^2})dt^2 + \dfrac{dx^2}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} + dy^2 + dz^2$

V polarnih koordinatah pa velja:

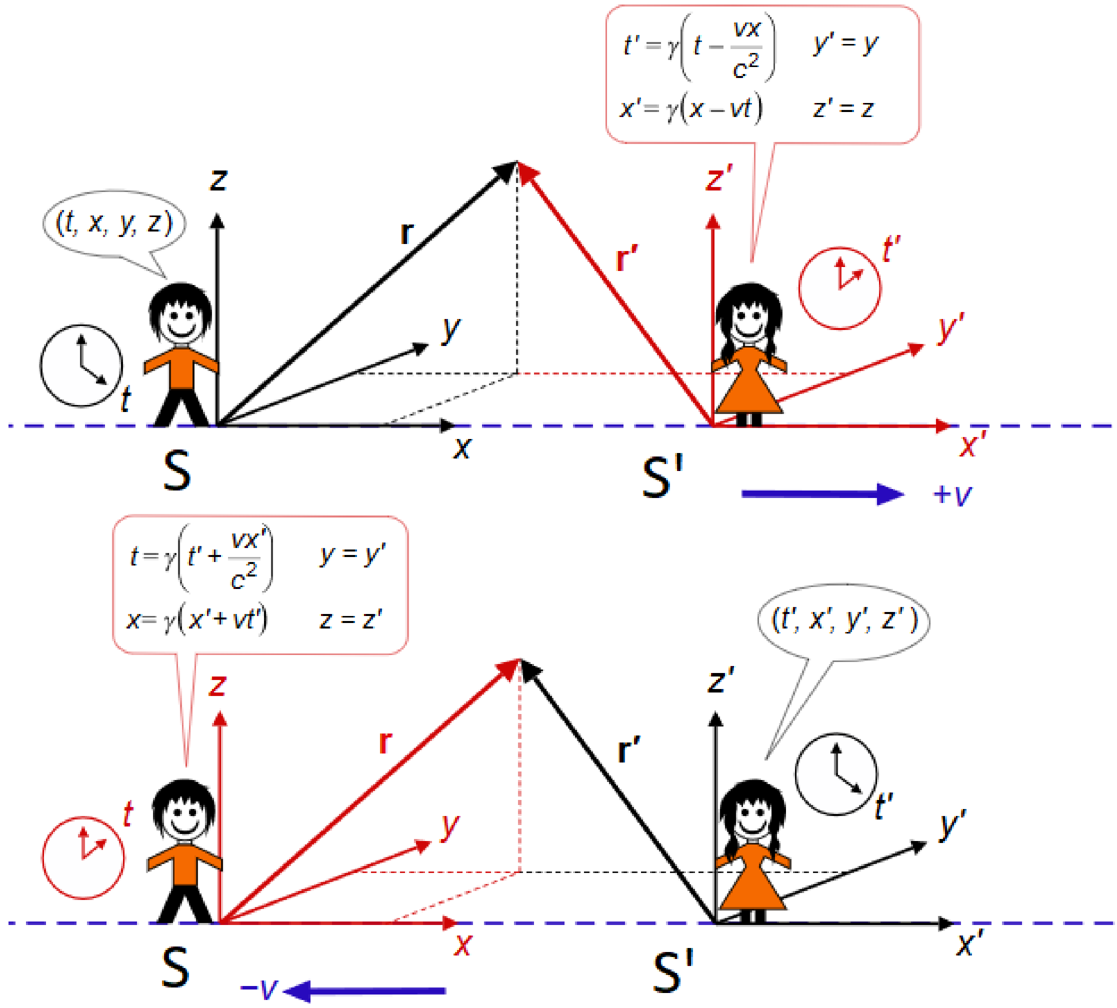
Ker velja:	dS^2 je:
$dr' = \dfrac{dr}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ $dt' = dt\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$	$ds^2 = -c^2(1-\dfrac{v^2}{c^2})dt^2 + \dfrac{dr^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)$

Lorentzove transformacije:

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>
Galilejeve transformacije ($x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$) pri velikih hitrostih ne veljajo.
Poglejmo torej, kako se zapišejo transformacije med nepospešenimi sistemi za hitrosti primerljive s hitrostjo svetlobe – to so Lorentzove transformacije:
$\Upsilon = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$
$x' = \gamma(x - vt)$
$y' = y$
$z' = z$
$t' = \gamma\left(t - \dfrac{v \cdot x}{c^2}\right)$
Razložimo zgornje povezave – oba opazovalca merita lego x, oz. x' in časa t in t'.
Opazovalec, ki miruje, vidi dolžino x' nekoliko krajšo (in sicer x'/Υ, skrčenje dolžin), zato velja
x = vt + x'/Υ - od koder dobimo povezavo x' = Υ(x – vt).


Opazovalec v gibajočem sistemu pa vidi, da se je njegov sistem premaknil za vt', in če zraven prišteje še x' (za katero velja iz prejšnjega razmisleka povezava x' = Υ(x – vt), vidi razdaljo x nekoliko krajšo (in sicer x/Υ), zanj torej velja
x/Υ = vt' + x' = vt' + Υ(x – vt)
Iz prve enačbe torej dobimo:
x' = Υ (x – vt).
Iz druge izrazimo čas t' = x/(Υv) – x'/v, če za x' vstavimo Υ(x – vt), dobimo za t' izraz:
$t' = \gamma\left(t - \dfrac{v \cdot x}{c^2}\right)$
Če je x = vt, kar velja za naš primer z avtom in odbitim žarkom, dobimo za čas
$t' = \Upsilon(t - v^2t/c^2) = \Upsilon t(1 - v^2/c^2) = \Upsilon t/\Upsilon^2 = t/\Upsilon = t(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, kar smo tudi že pokazali.
</td>
</tr>
</table>



Slika kaže Lorentzove transformacije (relativno gibanje opazovalcev v smeri x koordinate), kjer oba nepospešena opazovalca pravilno trdita, da v sosednjem opazovalnem sistemu teče čas drugače, a pri obeh se ohranja hitrost svetlobe. Slika (meritve) dogajanja je za oba simetrična v četvercu metrike prostor-čas.

V literaturi lahko najdete več poti do Lorentzovih transformacij – mi smo uporabili najbolj preprosto in večini najbolj razumljivo. Lorentzove transformacije pa lahko izpeljete tudi matematično bolj formalistično, recimo za primer, ko sta na začetku t = t' = 0 koordinati (x in x') poravnane (y=y', z=z') in velja za oba opazovalca, da se v obeh žarek svetlobe širi z enako hitrostjo c, ko torej velja:

$$\boldsymbol{-c^2t^2 + x^2 = -c^2t'^2 + x'^2}$$

Poskusite z linearno transformacijo, kjer se bo ohranjala metrika v obeh nepospešenih sistemih:

x' = Ax + Bct

ct' = Cx + Dct

Z nekaj znanja hiperboličnih funkcij se boste dokopali do Lorentzovih transformacij ($\mathbf{x' = \Upsilon(x - vt)}$ in $\mathbf{t' = \Upsilon\,(t - vx/c^2)}$) po nekoliko zahtevnejši poti, Lorentzov člen $\Upsilon = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ je seveda enak kot pri naši preprosti izpeljavi.

Še malo zgodovine. Maxwellove enačbe elektrodinamike povezujejo električno in magnetno polje v elektromagnetno polje ter opisujejo njegove časovne spremembe in širjenje v prostoru – recimo svetlobo. Če uporabimo Galilejeve transformacije, Maxwellove enačbe spremene obliko, ko se preselimo v drug inercialni sistem. Lorentz pa je poiskal take transformacije med inercialnimi sistemi, ki ne spremene oblike Maxwellovih enačb. Transformacije se po njem imenujejo Lorentzove transformacije – so začetek relativnosti.

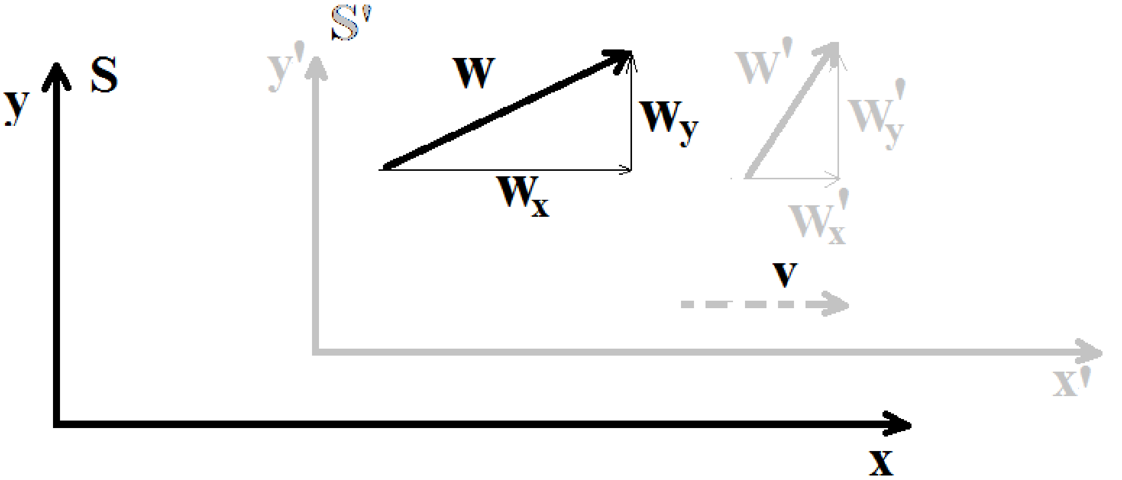
Poiščimo še povezavo med hitrostjo telesa **w** (naj telo potuje v x smeri), ki jo izmerimo iz sistema **S** in hitrostjo telesa **w'**, ki jo izmeri opazovalec, ki potuje s sistemom S' (sistem S' potuje v x smeri s hitrostjo v). Velja, da je hitrost w' = Δx'/Δt'. Namesto Δx' in Δt' vstavimo Lorentzove transformacije [$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$ in $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$]. Sledi izračun.

$w' = \Delta x'/\Delta t' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)/y(\Delta t - v\Delta x/c^2) = \Delta t(\Delta x/\Delta t - v)/(\Delta t(1-(v\Delta x/\Delta t)/c^2))$

Končni rezultat je precej preprost, seveda upoštevamo, da je w = Δx/Δt:

$$\mathbf{w' = (w-v)/(1-vw/c^2)}$$

Kaj pa, če telo potuje v sistemu S, recimo poševno s hitrostjo $w = (w_x^2 + w_y^2)^{1/2}$. Kolikšni sta komponenti $\mathbf{w_x'}$ in $\mathbf{w_y'}$ v sistemu S', ki potuje s hitrostjo (v) v x smeri? Glej sliko spodaj – **črna barva ponazarja, kako vidi gibanje telesa opazovalec iz sistema S**, siva barva pa ponazarja, kako vidi gibanje telesa opazovalec iz sistema S', ki potuje v smeri x osi.



Za x komponento hitrosti velja enako kot v prvem primeru, le da to sedaj označimo z indeksom x:

$$\mathbf{w_x' = (w_x-v)/(1-vw_x/c^2)}$$

Za y komponento hitrosti pa velja $W_y' = \Delta y'/\Delta t'$, ker je $\Delta y = \Delta y'$, sa sistem S' potuje zgolj v x smeri, za $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$. Povedano vstavimo v enačbo za $W_y' = \Delta y'/\Delta t'$. Tako dobimo $w_y' = \Delta y/(\gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)) = (\Delta y/\Delta t)/(\gamma(1-v(\Delta x/\Delta t)/c^2)) = w_y/(\gamma(1-vw_x/c^2))$

Končni rezultat w_y' je precej preprost:

$$\mathbf{w_y' = w_y/(\gamma(1-vw_x/c^2)) = w_y(1 - v^2/c^2)^{1/2}/(1-vw_x/c^2)}$$

Za z smer v prostoru je izpeljava hitrosti w_z' praktično enaka, kot prej:

$$\mathbf{w_z' = w_z/(\gamma(1-vw_x/c^2)) = w_z(1 - v^2/c^2)^{1/2}/(1-vw_x/c^2)}$$

Spodaj je še matrični zapis Lorentzovih transformacij, kjer sistem s' potuje v x smeri.
Koeficient β = v/c:

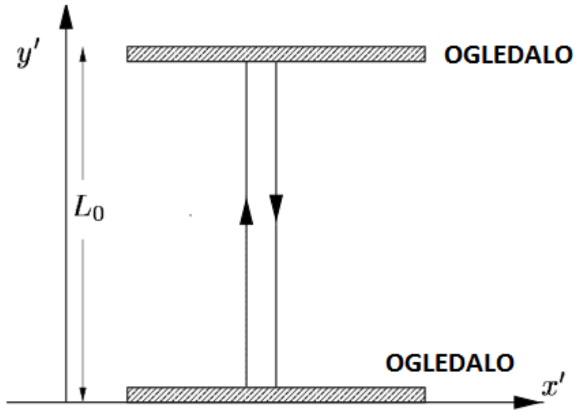
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \gamma\beta x \\ \gamma x - \beta\gamma ct \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

	Zapis metrike - merjenje dolžine ds - preko metričnega tenzorja $\boldsymbol{g_{\mu\nu}}$ (ki ga v splošni teoriji relativnosti (velja za raven prostor) označimo s črko η). Dolžina ds, torej metrika, se izračuna kot produkt vektor, tenzor, vektor: $\mathbf{ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}}$. $$g_{\mu\nu} = \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ $$\mathbf{ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}}$$ $$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \begin{pmatrix} cdt & dx & dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

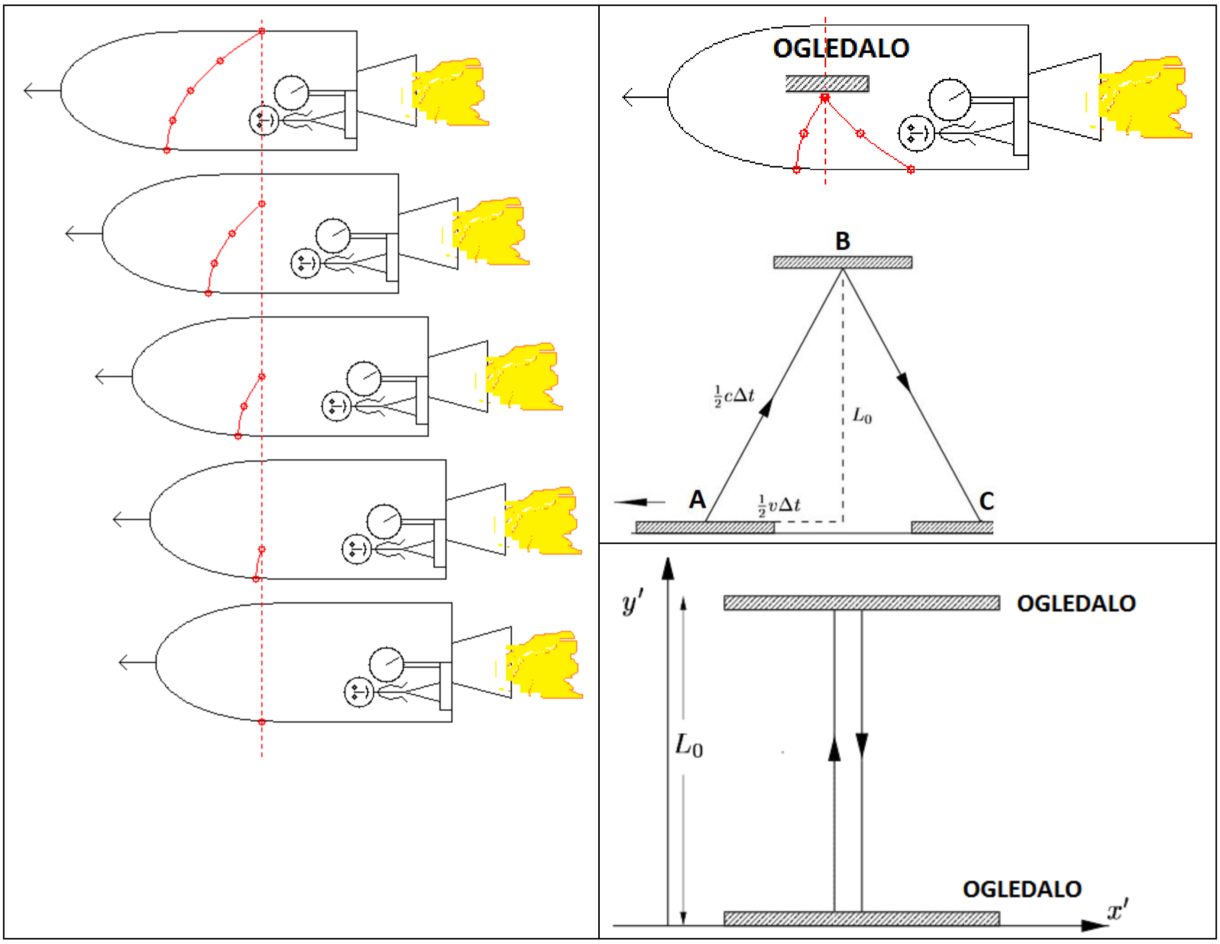
Načelna enakovrednost biološkega staranja in fizikalnega merjenje časa

Vsi procesi - kemični, biološki, merilne naprave, človeško zaznavanje, ki vključuje oko in možgane, komunikacijo, prenos sil - so omejeni s hitrostjo svetlobe. Ura, ki deluje na vseh ravneh je v svojem bistvu odvisna od svetlobne hitrosti in je zato tudi podvržena lastnemu lokalnemu času (ki je za opazovalca v drugačnih pogojih premaknjen – recimo zaostaja ali prehiteva) celo na atomski ravni. Biološko staranje se zato načeloma nikakor ne razlikuje od merjenega časa. To pomeni, da se teoretično biološko staranje upočasni na enak način kot ura. Seveda s privzetkom, da ima fiziologija živih bitij svoje omejitve. Kot bomo videli, pospeški, gravitacija upočasnijo tek ur glede na opazovalce daleč vstran od zvezd, od pospeševanja. To pa ne pomeni, da bi lahko recimo pri močni gravitaciji tudi lagodno preživeli »počasno« staranje. Poglejmo primer bližanja zelo majhni, a zelo gosti (recimo nevtronski) zvezdi. Nevtronska zvezda nas bo tako prej, s svojo izjemno gravitacijo ($\mathbf{10^{11}}$ krat pospešek na Zemlji), ugonobila – plimske sile celo raztrgale – kot da bi se, glede na kolega na Zemlji, lagodno in počasi starali (ko bi ga namreč spet obiskali, bi naša ura kazala krajši čas ...).

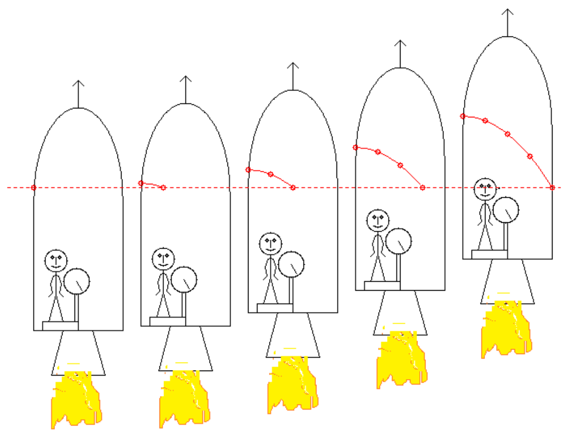
Zakaj pospešek vpliva na čas?



Princip merjenja časa je v splošnem kar štetje ponovitev nekega periodičnega dogajanja – recimo števila odbojev svetlobe med ogledaloma. Na koncu se izkaže, da je to (spremljanje, beleženje elektromagnetnega valovanja) v grobem splošni princip za vse relevantne ure – to so recimo atomske ure, po letu 2000 pa tudi kvantne ure, ki imajo napako ene sekunde na milijardo let. Če pogledamo sliko odboja žarka med dvema zrcaloma, je ta čas povratka žarka enoličen samo v nepospešenem sistemu – okolju. Če pa smo v pospešenem sistemu, pa se pojavijo za nas podobni efekti kot v primeru nepospešenega opazovalca, ki opazuje gibajoč sistem. V bistvu kar enak efekt, če gledamo kratko periodo, ko lahko privzamemo povprečno hitrost (oziroma se hitrost v zelo kratkem času le malo spremeni).



Leva slika kaže pot svetlobe v raketi, ki pospešuje, slika na desni zgoraj kaže pot žarka odbitega od ogledala v pospešeni raketi in desno na sredi poenostavljeno sliko, ki jo vidi opazovalec v raketi v kratkem času pri dani hitrosti (odboj žarka od ogledal), desna slika spodaj pa kaže odboj svetlobe v nepospešenem sistemu.
V pospešeni raketi čutimo podoben efekt, kot na Zemlji – občutek »teže« - in tudi svetlobni žarek več ne potuje premo - ampak krivo. Če je prihod žarka nazaj do senzorja mera za čas (zaključena pot žarka med A – B – C je torej takt), je teh prihodov manj kot v nepospešenem sistemu – kjer žarek prej prispe do izhodišča – zato v nepospešenem sistemu ura teče hitreje (naredi več taktov). Za gravitacijo velja, da jo lahko obravnavamo v dani točki, kot sistem, ki potuje z ubežno hitrostjo. Zakaj? V tem primeru sta oba efekta enakovredna (gravitacija ali sistem z ubežno hitrostjo). To kažejo tudi meritve časa – a o interpretaciji, razumevanju pa je kar nekaj upravičenih dilem – a redko kdaj so se primarni miselni eksperimenti (izračuni) bolj ujemali z meritvami kot pri relativnosti. O tem več pri splošni teoriji relativnosti.
Poanta pri razmislekih nove fizike je zmeraj znova končna hitrost svetlobe (elektromagnetnega valovanja), ki je tudi omejitev pri merjenju časa, kot tudi pri vseh ostalih procesih v naravi, v vesolju.



V resnici bi bilo fiziko velikih hitrosti bolje začeti s pospešenimi sistemi. Zakaj? Če na začetku obravnavamo zgolj nepospešene sisteme – se zdi, da je relativnost »larifari« - saj so nasprotniki nove fizike že od začetka opozarjali, da se zdi relativnost protislovna – saj vsak opazovalec lahko trdi, da v drugem opazovalnem sistemu čas teče enako počasneje. To seveda drži le za nepospešena gibanja (t. i. paradoks dvojčkov) – kakor pa se kak sistem giblje pospešeno (velja tudi za kroženje) ali je v gravitacijskem polju, je tam tek ur dejansko drugačen – kot v nepospešenih ali drugače pospešenih sistemih. Nerealno zastavljen paradoks dvojčkov tako kdaj odvrne bralce od bistva relativnosti. Dva nepospešena sistema sta v resnici enakovredna in vsak upravičeno lahko trdi za drug sistem, da tam čas teče drugače in hkrati velja popolna simetrija izračunov. Če imamo pa pospešen sistem in nepospešen sistem in recimo, da uravnamo ure v obeh sistemih pred pospeševanjem (recimo da ena ura začne krožiti – kroženje je pospešeno gibanje) in se po določenem času ti dve uri primerjata – bo ura, ki je bila v pospešenem sistemu kazala manj. Zelo pedagoški je primer radioaktivnega razpada. Če recimo izvor radioaktivnega elementa hitro kroži (v pospeševalniku CERN), bo v tem sistemu razpadlo manj atomov kot v mirujočem viru. Tudi primerjanje atomskih ur, recimo da ena potuje z letalom, druga pa miruje, je pokazalo, da taki uri tečeta drugače – končna primerjava ur se ujema z izračuni relativnosti. Tudi GPS ure na satelitih tečejo drugače kot na Zemlji in to mora sistem globalne satelitske navigacije seveda upoštevati.

Gibalna količina (p) in energija (E) v posebni relativnosti

Pri vpeljavi gibalne količine pri velikih hitrostih je več pristopov. Do končnega rezultata **p = mϒv** se marsikdaj preskoči osnove relativnosti, to je metrika in četverec prostor-čas in se kar privzame klasični zapis pomnožen z Lorentzovim členom. A v tem primeru se samo poglobi dvom, da se relativistična mehanika sploh da razumeti. Večina resnih knjig pa se seveda naloge loti zelo formalno in matematično korektno odvaja četverec po času, kar nas pripelje do četverca hitrosti, recimo v dveh opazovalnih sistemih, na koncu pa se četverca pomnoži še z maso. A tukaj bomo opisali še tretjo pot – kjer se bomo držali načela, **da se četverec pri enakomernem gibanju zapiše v obliki**, ki dokazuje, da gibalna količina ni eksplicitno odvisna od časa.

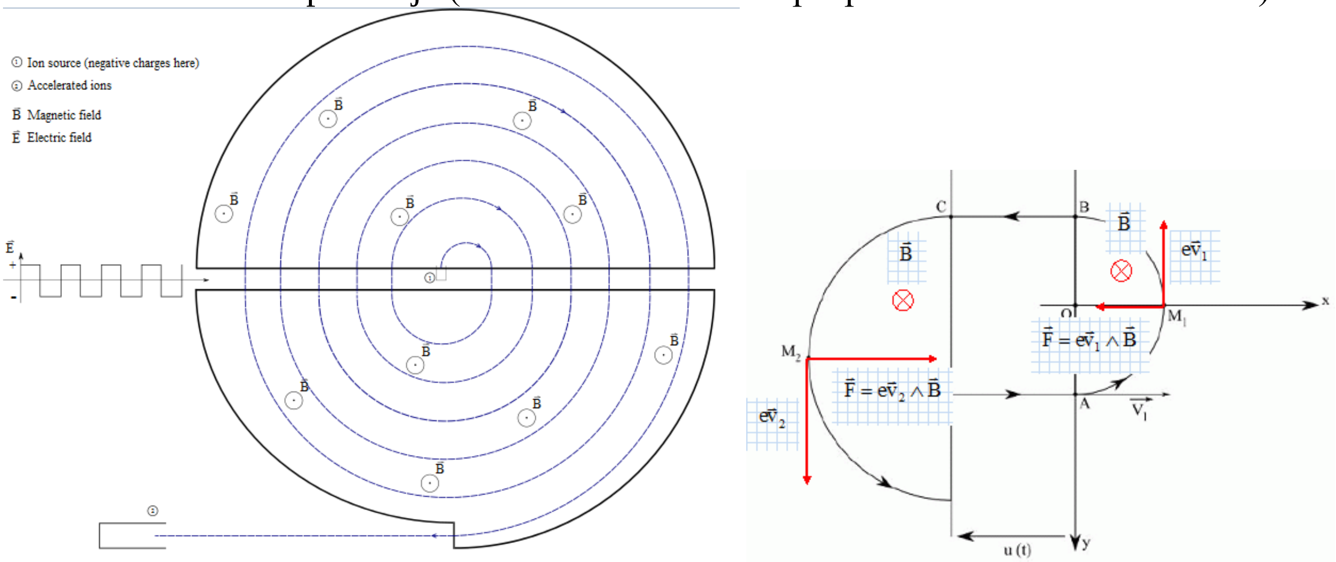
Pa začnimo z metodo odvajanja.
Poglejmo vektor prostor-čas (četverec) zapisan za gibanje v smeri x: (ct', 0) = (ct, x)
Ostale smeri (y, z) v tem primeru niso relevantne, zato smo jih izpustili.
V sistemu S' naj telo z maso m miruje, za premik v sitemu S velja:
(cdt', 0) = (cdt, dx)
- namesto dt' zapišemo že izpeljano povezavo dt' = dt/ϒ in delimo z dt (v resnici levo in desno stran odvajamo po času t, hitrost v = dx/dt), tako dobimo četverec hitrosti,
(cdt/ϒ, 0) = (cdt, dx) - levi in desni del enačbe pomnožimo z ϒ/dt
(c, 0) = (cϒ, ϒdx/dt)
(c, 0) = (cϒ, ϒv)
- če enačbo pomnožimo z maso m, dobimo četverec gibalne količine,
(cm, 0) = (mcϒ, mϒv)

Nekateri pa gibalno količino raje izpeljejo preko definicije, da se pri enakomernem gibanju hitrost in s tem gibalna količina, za togo telo, s časom ne spreminjata – izključimo torej čas (velja dt = ϒdt' in dx = vdt):
(cdt', 0) = (cdt, dx) = (cdt, vdt) = (cϒdt', vϒdt') = dt' (cϒ, vϒ)
Ko okrajšamo diferencial časa dt' nam ostane samo četverec hitrosti (c, 0) = (cϒ, ϒv), in če ga pomnožimo z maso, dobimo že znani izraz za gibalno količino:
(cm, 0) = (mcϒ, mϒv)

Zdi se, da izpeljava ni drugačna, da nismo ničesar pridobili. A pot v izhodišču ni temeljila na odvajanju po času, ampak na krajšanju (izločanju) časa t' oziroma t, ki tako za dobljeno gibalno količino pričakovano ni relevanten. Nekateri se namreč ne strinjajo, da kar v obeh sistemih odvajaš z enim časom t ... Matematično sicer nismo ničesar spremenili, smo pa fizikalno nekoliko drugce peljali do rezultata (za nekatere smo bolj razvidno pokazali, da je gibalna količina neodvisna od časa in tako člen **mϒv** - z dodatkom Lorentzovega člena ϒ - morebiti ni več tako skrivnosten, nerazumljiv). Namesto diferenciala časa, ker gre za enakomerno gibanje, bi lahko preprosto zapisali kar čas t oz. t' in tako dobili izraz: t'(c, 0) = t'(cϒ, ϒv), kjer se čas okrajša.
V resnici smo s tem pokazali, da sta za telo, ki potuje enako hitro kot sitem S', zapisa četvercev lege (za računanje metrike) in četverca hitrosti, povsem enakovredna (isti izraz zapisan na dva načina, ki pa vsak na svoj način izluščita bistvo nove relativistične mehanike).

Zapis hitrosti $(c, 0) = (c\Upsilon, \Upsilon v)$ je za dani primer enakovreden zapisu lege $(ct', 0) = (ct, x)$. Če pomnožimo četverca še z maso, dobimo gibalno količino $\underline{p} = (cm, 0) = (mc\Upsilon, m\Upsilon v)$, in če poiščemo še velikost vektorjev $(\underline{p}.\underline{p})$, smo že zajadrali v samo jedro nove mehanike:
$-(cm)^2 = -(mc\Upsilon)^2 + (m\Upsilon v)^2$
O izjemnem pomenu zadnje enačbe pa nekoliko pozneje.

No – gremo naprej, prišli smo torej do četverca gibalne količine enakomerno se gibajočega telesa (s hitrostjo v in maso m). Podčrtan $\underline{p}$ naj simbolizira vektor - četverec, gibalne količine - Velja:
$\underline{p} = (cm, 0) = (mc\Upsilon, m\Upsilon v)$
Dopolnjen klasični del gibalne količine $(m\Upsilon v)$ lahko zapišemo kot:
$p = m\Upsilon v = mv/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$
V resnici je nekaj težav z razumevanjem izpeljane enačbe, a da faktor **$m\Upsilon$** ni zgolj matematična telovadba, nam že takoj pokažejo načrti za pospeševalnike delcev – kjer za centripetalno silo morajo upoštevati relativistično gibalno količino, oziroma silo (kdaj tudi pravimo relativistično maso $[m\Upsilon]$, a taka interpretacija mase je lahko nekoliko zavajajoča). Centripetalna sila Fc pri kroženju delca je namreč sorazmerna izrazu $mv^2/r = pv/r$, pri velikih hitrostih pa moramo upoštevati še Lorentzov faktor $[(m\Upsilon v)v/r = m\Upsilon v^2/r]$, zato velja:
$Fc = m\Upsilon v^2/r = evB$. Za enakomerno kroženje velja v grobem, da je polmer r pospeševalnika:
$r = m\Upsilon v^2/(evB) = m\Upsilon v/(eB) = p/(eB)$.
- **e** je naboj, **B** je gostota magnetnega polja (sliki spodaj).
Poudarimo še, da je v tem primeru Υ funkcija hitrosti delca, ne koordinatnega sistema in se lahko s časom tudi spreminja (delce seveda moramo pospeševati do končnih hitrosti).



Shema pospeševalnika nabitih delcev s cikličnimi potmi, ki jih omogoča magnetno polje, električna napetost pa delce pospešuje (električna sila med ploščama na naboj e je $F = eU/d$). Se še bomo vrnili k pospeševalnikom.

V resnici, ker električne naboje pospešujemo z napetostjo, oz. električnim poljem (polje *E* izjemoma označimo z nekoliko baročno zapisano oznako $\mathcal{E}$, da ga bomo ločili od oznake za energijo E), lahko zapišemo celotno silo na delec kar kot Lorentzovo silo:
$F = e\mathcal{E} + evB = eU/d + evB$
Ali tudi:

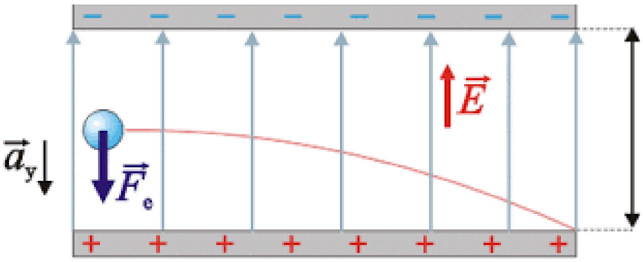
$\mathbf{F = q\mathcal{E} + qvB = qU/d + qvB}$

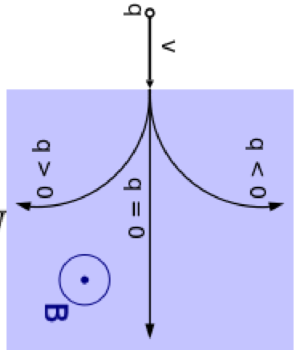
Električna sila $\mathbf{q\mathcal{E}}$ pospešuje delce, magnetna sila $\mathbf{qvB}$ pa krivi poti delcev – hitrosti delcev so v dani obliki enačb pravokotne magnetno polje B.

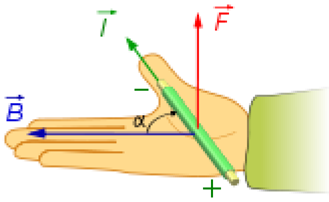
V vektorski obliki, z vektorskim produktom $\mathbf{q\underline{v}}\times\mathbf{\underline{B}}$, je zapis Lorentzove sile splošno veljaven:

$\mathbf{\underline{F} = q(\underline{\mathcal{E}} + \underline{v}\times\underline{B})}$

- danes že večina označuje naboj s črko q, torej je sila $F = q\mathcal{E}$







Energija – od kod znamenita enačba $E = mc^2$

Kako je s kinetično energijo Ek pri velikih hitrostih?

Ker je gibalna količina enaka $p = m\Upsilon v$, in ker je kinetična energija enaka vsoti prispevkov vdp velja $\int dEk = \int vdp$, bomo najprej izrazili diferencial Lorentzovega člena Υ.

$\Upsilon = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

$d\Upsilon = vdv/(c^2(1 - v^2/c^2)^{3/2}) = (v\Upsilon^3/c^2)dv$

$dv = d\Upsilon/(v\Upsilon^3/c^2)$

Gibalna količina je: $p = m\Upsilon v$.

Zapišimo diferencial (»delček«) dEk kinetične energije.

$dEk = vdp = vd(m\Upsilon v) = mv(\Upsilon dv + vd\Upsilon) = mv(\Upsilon d\Upsilon/(v\Upsilon^3/c^2) + vd\Upsilon) = m(c^2/\Upsilon^2 + v^2)d\Upsilon$

Ker velja $c^2/\Upsilon^2 + v^2 = c^2(1 - v^2/c^2) + v^2 = c^2$, se izraz dEk zelo poenostavi.

$dEk = m(c^2/\Upsilon^2 + v^2)d\Upsilon = mc^2d\Upsilon$

$\int dEk = \int mc^2 d\Upsilon$

$Ek\big| = mc^2\Upsilon\big|$

Integrirajmo od kinetične energije Ek = 0 do Ek in od hitrosti v = 0 do v.

$Ek = mc^2(\Upsilon - 1/(1 - 0/c^2)^{1/2}) = mc^2(\Upsilon - 1)$

Končni rezultat za kinetično energijo Ek je torej (po Albertu Einsteinu):

$\mathbf{Ek = mc^2(\Upsilon - 1) = mc^2\Upsilon - mc^2 = mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2} - mc^2}$

Lastna (tudi mirovna) energija delca je definirana kot: $\mathbf{Eo = mc^2}$.

Polna energija delca je definirana kot: $\mathbf{E = Ek + Eo = mc^2\Upsilon}$

Poglejmo ali kinetična energija pri majhnih hitrostih preide v klasični izraz $Ek = \mathbf{mv^2/2}$. Za dokaz privzamemo, da je pri majhnih hitrostih izraz $1/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \approx 1 + v^2/(2c^2)$.

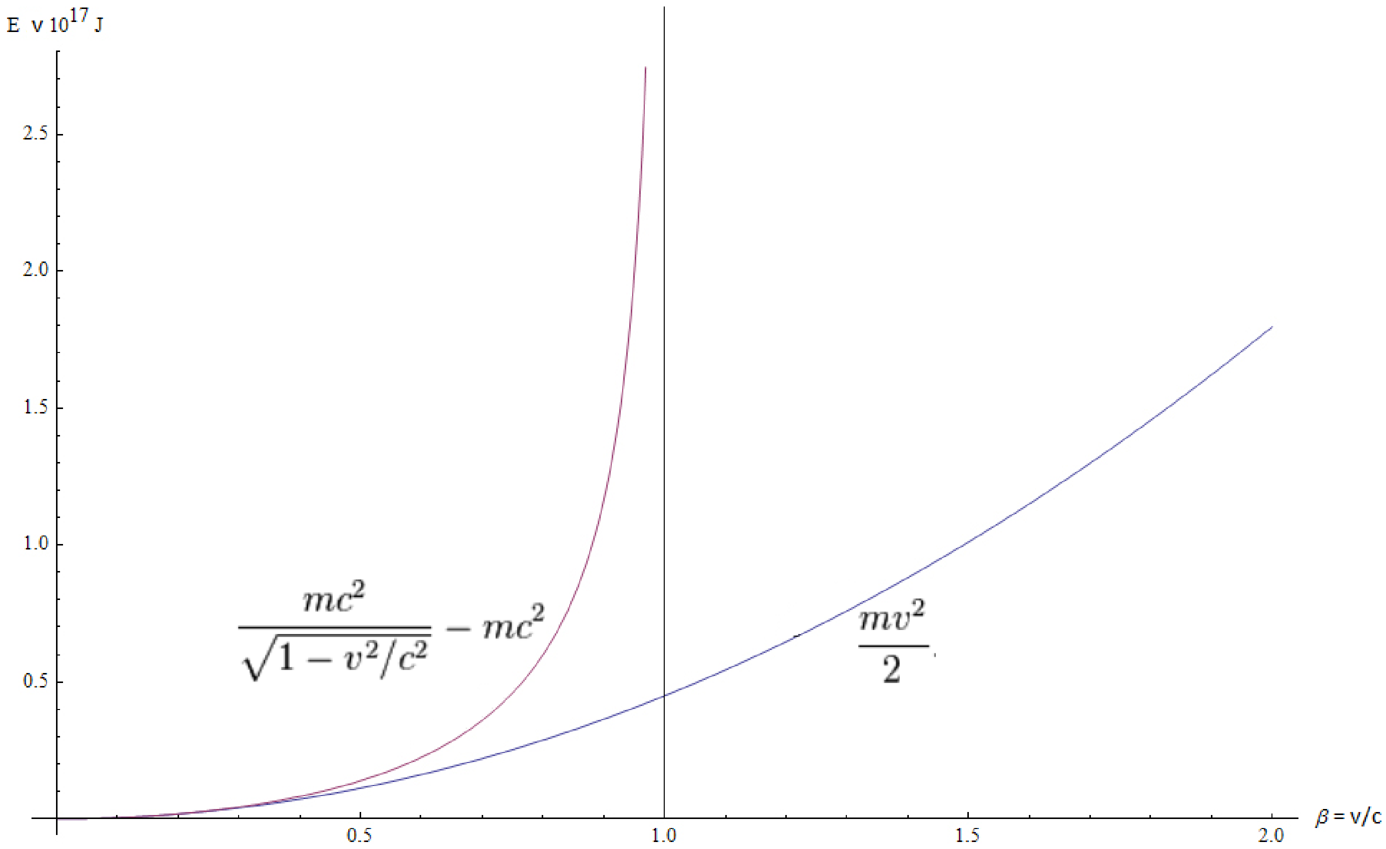
$Ek = mc^2\Upsilon - mc^2 = mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2} - mc^2 \approx mc^2(1 + v^2/(2c^2)) - mc^2 = mv^2/2$

In to je zelo eleganten dokaz, da smo pravilno izpeljali povezavo za relativistično kinetično energijo:
Ek = mc^2(ϒ - 1).

Lorentzov člen lahko zapišemo na več načinov:
$\Upsilon = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$
$\beta = v/c$
$\Upsilon = 1/(1 - \beta^2)^{1/2}$
$\beta = (1 - 1/\Upsilon^2)^{1/2}$
$\Upsilon = (1 + p^2/(mc)^2)^{1/2}$
$\Upsilon = c/(c^2 - v^2)^{1/2}$
$\Upsilon = dt/dt' = dt/d\tau$
$\Upsilon = Ek/(mc^2) + 1$

$$\tanh\varphi = \beta$$
$$\gamma = \cosh\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Vsak zapis je po svoje uporaben in sporočilen – recimo:
$\Upsilon = Ek/(mc^2) + 1$ ali $\Upsilon = (1 + p^2/(mc)^2)^{1/2}$, od koder sledi **E = mc^2(1 + p^2/(mc)^2)$^{1/2}$.**



Graf kinetične energije (za m =1 kg) v klasični (nepravilni) obliki in relativistični pravilni obliki glede na razmerje $\beta = v/c$. Ta graf nazorno kaže, da pri pospeševanju delcev (elektroni, protoni, ...) blizu svetlobne hitrosti, za povečanje hitrosti le za nekaj procentov, rabimo veliko več energije kot pri klasičnem opisu in majhnih hitrostih. To je eden od »problemov« pospeševalnikov.

Kako pa je s silo za pospeševanje delca z maso 'm' v 'x' smeri? V splošnem velja, da zunanja sila ali rezultanta sil na nek opazovani sitem v določenem času (dt) spremeni gibalno količino ($dp=d(m\Upsilon v)$). Povedano zapišimo za masni delec z maso 'm' in upoštevajmo relativistični člen (Υv):

$Fx = dp/dt = md(\Upsilon v)/dt$

$d(\Upsilon v)/dt = (v^2\Upsilon^3/c^2)dv/dt + \Upsilon dv/dt = (v^2\Upsilon^3/c^2)a + \Upsilon a$

$d(\Upsilon v)/dt = a\Upsilon^3 (v^2/c^2 + 1/\Upsilon^2) = a\Upsilon^3 (v^2/c^2 + 1 - v^2/c^2) = a\Upsilon^3$

Če gre za gibanje v ravnini lahko pospešek zapišemo iz dveh komponent ($\underline{a} = \underline{a_x}+\underline{a_y}=\underline{a}\|+\underline{a}\perp$):

$d(\Upsilon\underline{v})/dt = (\underline{v}\Upsilon^3/c^2)*(\underline{v}*\underline{a}) + \Upsilon\underline{a}$

Ker je pospešek v ravnini $\underline{a} = \underline{a_x} + \underline{a_y} = \underline{a}\| + \underline{a}\perp$ sestavljen iz dveh komponent, v splošnem vzporedne $\|$ in pravokotne $\perp$ komponente, veljajo naslednje povezave za skalarne (znak *) produkte med vektorjema $\underline{v}$ in $\underline{a}$.

$\underline{v}* \underline{a}\perp = 0$ in zato velja $\underline{v}* \underline{a} = \underline{v}* \underline{a}\|$

$d(\Upsilon\underline{v})/dt = (\underline{v}\Upsilon^3/c^2)*(\underline{v}*\underline{a\|}) + \Upsilon(\underline{a}\| +\underline{a}\perp) = (\Upsilon^3/c^2)v^2\underline{a\|} + \Upsilon(\underline{a}\| +\underline{a}\perp) = \underline{a\|}\Upsilon^3(v^2/c^2 + 1/\Upsilon^2) + \Upsilon\underline{a}\perp$

Ke je $(v^2/c^2 + 1/\Upsilon^2) = (v^2/c^2 + 1 - v^2/c^2) = 1$, velja:

$d(\Upsilon\underline{v})/dt = \Upsilon^3 \underline{a\|} + \Upsilon\underline{a}\perp$

$\underline{F} = md(\Upsilon\underline{v})/dt = m\Upsilon^3 \underline{a\|} + m\Upsilon\underline{a}\perp$

Končni rezultat sile v x smeri je:

$F_x = md(\Upsilon v)/dt = m\Upsilon^3 a_x$

Za y in z smeri velja (kot smo že izpeljali), če sila deluje v treh smereh $\underline{F} = (Fx, Fy, Fz)$, sistem S' pa se giblje le v x smeri:

$F_y = dp_y/dt = md(\Upsilon v_y)/dt = m\Upsilon(dv_y/dt) = m\Upsilon a_y$ ***(člen Υ se ne odvaja, ker sistem ne potuje v y smeri)***

$F_z = m\Upsilon a_z$ ***(enak premislek kot za y smer – primer je pospeševanje v magnetnem polju – pospeševalnik v Cernu)***

Kakšno silo pa izmeri opazovalec v sistemu S', ki se giblje v x smeri?

Gre za isti primer kot prej (za x' koordinato velja $dx' = \Upsilon dx$, za $dt'^2 = dt^2/\Upsilon^2$).

$(Fx', Fy', Fz') = m(d^2x'/dt'^2, d^2y'/dt'^2, d^2z'/dt'^2) = m(\Upsilon^3 d^2x/dt^2, \Upsilon^2 d^2y/dt^2, \Upsilon^2 d^2z/dt^2)$

$(Fx', Fy', Fz') = m(\Upsilon^3 a_x, \Upsilon^2 a_y, \Upsilon^2 a_z)$

Torej velja:

$Fx = Fx' = m\Upsilon^3 a_x$

$Fy = Fy'/\Upsilon = \Upsilon^2 a_y/\Upsilon = m\Upsilon a_y$

Končni rezultat je:

$(Fx, Fy, Fz) = (Fx', Fy'/\Upsilon, Fz'/\Upsilon)$

$Fx = Fx'$

$Fy = Fy'/\Upsilon$

$Fz = Fz'/\Upsilon$

V splošnem pa za Lorentzov člen velja $\Upsilon = 1/(1 - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/c^2)^{1/2}$, oziroma $\Upsilon = 1/(1 - (p/mc)^2)^{1/2}$, kjer je p = mv, klasična gibalna količina.

Sila in energija

Ker velja, da je dE = Fdx, je sila odvod energije po poti: F = dE/dx

Velja a = dv/dt in 1/v = 1/(dx/dt), zato je odvod $d\Upsilon/dx = \Upsilon^3 v(dv/dx)/c^2 = \Upsilon^3 v(dv/dt)/(c^2 dx/dt)$

$d\Upsilon/dx = \Upsilon^3 va/(c^2 v) = \Upsilon^3 a/c^2$

$F = dE/dx = F = d(mc^2\Upsilon)/dx = mc^2 d\Upsilon/dx = m\, c^2\Upsilon^3 a/c^2 = m\Upsilon^3 a$

Tako smo prišli do pričakovanega rezultata za silo iz polne energije F = dE/dx:

$\mathbf{F = m\Upsilon^3 a}$

Seveda, da ne bi bilo kakih dvomov, gibalna količina in sila sta vektorski količini.

Poglejmo še primer, kako vpliva energija na pospešek. Torej, če recimo v pospeševalniku protonu dvakrat povečamo energijo ($E = \gamma mc^2$ sledi $\gamma = E/mc^2$), bo pospešek osemkrat manjši, saj velja $\mathbf{a = F/(m\gamma^3)}$. To je eden večjih problemov pri pospeševanju delcev. Sila na električni naboj v električnem polju $\mathcal{E}$ se zapiše kot produkt naboja e in jakosti električnega polja $F = e\mathcal{E}$. Še opozorilo, danes večinoma označujejo naboj s črko q, torej je sila $F = q\mathcal{E}$. Za homogeno električno polje med vzporednima kovinskima ploščama na razdalji d in pod napetostjo U pa velja, da se sila na naboj zelo preprosto zapiše kot F =eU/d, oziroma F =qU/d.

Ali lahko do izraza za silo $F_x = md(\Upsilon v)/dt = m\Upsilon^3 a_x$ pridemo direktno iz četverca prostor-čas?

To seveda pričakujemo – pa za dril pokažimo pot. Vektor četverca bomo pisali s podčrtano oznako, recimo $\underline{p}$ ali $\underline{F}$. Izhajajmo iz četverca prostor-časa, ki smo ga že izpeljali za gibalno količino $\underline{\mathbf{p}} = (mc\Upsilon, m\Upsilon v)$, **gledamo primer pospeška v x smeri**. Sila je po definiciji sprememba gibalne količine v danem časovnem intervalu (kvocient med njima $\underline{F} = d\underline{P}/dt$). Za sistem S' velja (uporabili bomo naslednje povezave $dt = \Upsilon dt'$, oziroma $dt' = dt/\Upsilon$):

$\underline{\mathbf{F'}} = d\underline{p}'/dt' = \Upsilon d\underline{p}'/dt = \Upsilon d\underline{p}/dt.$

$\underline{\mathbf{F}} = \Upsilon d\underline{p}/dt = \Upsilon d(mc\Upsilon, m\Upsilon v)/dt = \Upsilon(mcd\Upsilon/dt, md(\Upsilon v)/dt)$

Ker je pospešek a = dv/dt, in ker je $d\Upsilon/dt = d(1/(1 - v^2/c^2)^{1/2})/dt = (dv/dt)v/(c^2(1 - v^2/c^2)^{3/2}) = \Upsilon^3 va/c^2$, in ker je $d(\Upsilon v)/dt = a\Upsilon^3$, velja.

$\underline{\mathbf{F}} = \Upsilon(mc\Upsilon^3 va/c^2, m\Upsilon^3 a) = \Upsilon^4(mav/c, ma) = \mathbf{\Upsilon^4 ma(v/c, 1)}$ **-** *velja seveda za x smer*

Velikost vektorja F je (upoštevamo še, da je $(1 - (v/c)^2) = 1/\Upsilon^2$):

$F^2 = \Upsilon^8(ma)^2(-(v/c)^2 + 1) = \Upsilon^8(ma)^2(1 - (v/c)^2) = \Upsilon^8(ma)^2/\Upsilon^2 = \Upsilon^6(ma)^2$

Po korenjenju dobimo že pričakovan rezultat z x smer:

$\mathbf{F = ma\Upsilon^3 = f\Upsilon^3}$

Rezultat lahko tudi zapišemo kot:

$\mathbf{F = (m\Upsilon)a\Upsilon^2}$

Ali tudi v obliki, ko sila deluje na polno energijo delca ($m\Upsilon = E/c^2$):

$\mathbf{F = (E/c^2)a\Upsilon^2 = Ea\Upsilon^2/c^2}$

Četverec sile

Splošen zapis četverca sile za delec z maso m je (upoštevamo še, da je $dt' = dt/\Upsilon$):
$\mathbf{\underline{F} = d\underline{p}/dt' = \Upsilon d(mc\Upsilon, m\Upsilon v)/dt = \Upsilon(d(\Upsilon mc)/dt, d(\Upsilon m\underline{v})/dt) = \Upsilon m(cd\Upsilon/dt, \underline{v}d\Upsilon/dt + \Upsilon\underline{a})}$
Za delec z maso m uporabimo že izvedene enačbe za $d\Upsilon/dt$ in za $d(\Upsilon\underline{v})/dt$ in dobimo naslednji izraz za četverec sile:
$\mathbf{\underline{F} = \Upsilon m(\Upsilon^3\underline{v}*\underline{a}_{||}/c, \Upsilon^3\,\underline{a}_{||} + \Upsilon\underline{a}_{\perp})}$

Če je $\mathbf{\underline{f} = d(\Upsilon m\underline{v})/dt}$ **in** $\mathbf{\underline{f}*\underline{v} = d(\Upsilon mc^2)/dt}$ potem tudi lahko zapišemo bolj splošno enačbo:
$\mathbf{\underline{F} = (\Upsilon\underline{f}*\underline{v}/c, \Upsilon\underline{f})}$

Poiščimo še povezavo med energijo E in gibalno količino p.
$E = mc^2\Upsilon = mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$
$E^2 = (mc^2)^2/(1 - v^2/c^2)$
$E^2(1 - v^2/c^2) = (mc^2)^2$
$E^2 - (mc^2)^2\Upsilon^2v^2/c^2 = E^2 - (m\Upsilon vc)^2 = \mathbf{E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2}$
$\mathbf{E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2}$

Če smo prav razmišljali, bi morali dobiti enak rezultat tudi iz četverca prostor-časa, ki smo ga že izpeljali za gibalno količino $\mathbf{(cm, 0) = (mc\Upsilon, m\Upsilon v)}$.
Poiščimo velikost četverca (to je skalarni produkt).

$-(cm)^2 = -(mc\Upsilon)^2 + (m\Upsilon v)^2$
$-(cm)^2 = -m^2c^2\Upsilon^2c^2/c^2 + (m\Upsilon v)^2$
$-(cm)^2 = -E^2/c^2 + (m\Upsilon v)^2$
$-(c^2m)^2 = -E^2 + (cp)^2$

Na koncu dobimo pričakovan rezultat:

$\mathbf{E^2 = (c^2m)^2 + (cp)^2}$

Rezultat kaže na konzistentnost metrike prostor-časa in take vaje nas vodijo v poglobljeno razumevanje teorije relativnosti.
Prehojena pot od metrike do enačbe $\mathbf{E^2 = (c^2m)^2 + (cp)^2}$ ima izjemen nauk - in sicer, da se osnovne zakone mehanike da izjemno elegantno in konzistentno izpeljati zgolj iz metrike – merjenja razdalj (v osnovi iz Pitagorovega izreka, dopolnjenega s kateto produkta hitrosti svetlobe in časa). Sam dokaz, da se kinetična energija pri majhnih hitrostih izenači s klasičnim zapisom kinetične energije ($E_k = mc^2\Upsilon - mc^2 = mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2} - mc^2 \approx mc^2(1 + v^2/(2c^2)) - mc^2 = mv^2/2$), daje teoriji relativnosti še dodatno konsistenco.

Izraz $E^2 = (c^2m)^2 + (cp)^2$ je zanimiv v navezavi s fotonom, svetlobo, za katero vemo, da nima mase ($m = 0$) in je člen $(c^2m)^2 = 0$. Iz česar sledi
$E^2 = 0 + (cp)^2$ ali $E = cp$, gibalna količina fotona je torej kar:
$\mathbf{p = E/c = h\nu/c = h/\lambda}$.

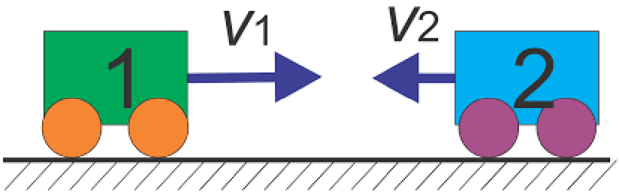
Zadnji primer nas še dodatno napeljuje na novo bolj univerzalno razumevanje mehanike in sicer, da recimo gibalna količina in sila, nista vezani zgolj na maso, ampak predvsem na energijo delca, sistema. Tako naenkrat ni več problem doumeti, da na svetlobo deluje tudi gravitacija, saj sila ni vezana zgolj na maso, ampak na energijo delca, sistema.
Tako se na koncu izkaže, da je nova relativnostna mehanika, ne samo bolj preprosta, ampak tudi bolj univerzalna, da celoviteje zajame dogajanje v naravi – odpravlja mnoga protislovja.

Še beseda o znameniti enačbi $E = mc^2$, ki smo jo nevede izpeljali. »m« je mirovna masa, mc^2 pa je ekvivalent energije. Dejansko s(m)o kmalu spoznali – preko jedrskih reakcij – da se del mase lahko pretvarja v energijo (recimo v elektromagnetno valovanje, v sevanje) in obratno. Zvezde, seveda tudi Sonce, preko masnega defekta pri jedrskem zlivanju (fuziji) lažjih nukleonov v težje (recimo vodika, štirih protonov v helijevo jedro), oddajajo v prostor ogromno energije in pri tem pričakovano zgubljajo na masi. Za sproščeno energijo fuzije velja:
$\mathbf{\Delta mc^2 = E}$.
Masa je torej ena izmed oblik energije. Jedrske reakcije v zvezdah so relativno zapleteni procesi, omenimo samo nekatere cikle. P-P in C-N ciklus ter trojna reakcija alfa. Pogoji pri katerih te reakcije tečejo so možni le zaradi delovanja gravitacije, ki stiska plin in prah v zvezde in v središčih zvezd se temperatura lahko povzpne tudi do 100 milijonov kelvinov.
V tem spoznanju, da je masa ena izmed oblik energije, se iščejo tudi odgovori za nastanek in razvoj vesolja, življenja, človeka.
V splošni teoriji relativnosti pa bomo spoznali, da je ukrivljenost prostor-časa posledica, ne samo masnih teles, ampak vseh energij.

SLEDI PREPROSTA VAJA, KI NAM LAHKO ŠE DODATNO PRIBLIŽA BISTVO RELATIVNOSTI – nove mehanike

Še enkrat poiščimo povezavo med hitrostjo telesa **w** (telo naj potuje v x smeri), ki jo izmerimo iz sistema **S** in hitrostjo telesa **w'**, ki jo izmeri opazovalec, ki potuje s sistemom S' (sistem S' potuje v x smeri s hitrostjo »v«). Velja, da je hitrost $w' = \Delta x'/\Delta t'$. Namesto $\Delta x'$ in $\Delta t'$ vstavimo Lorentzove transformacije [$\Delta x' = \gamma(\Delta x\text{-}v\Delta t)$ in $t' = \gamma(\Delta t\text{-}v\Delta x/c^2)$]. Sledi izračun.
$w' = \Delta x'/\Delta t' = \gamma(\Delta x\text{-}v\Delta t)/y(\Delta t\text{-}v\Delta x/c^2) = \Delta t(\Delta x/\Delta t\text{-}v)/(\ \Delta t(1\text{-}(v\Delta x/\Delta t)/c^2))$
Končni rezultat je precej preprost:
$\mathbf{w' = (w\text{-}v)/(1\text{-}vw/c^2)}$

Zadnjo izpeljavo bomo rabili pri vaji z gibalno količino. Kako je torej z ohranitvijo gibalne količine v relativnostni teoriji (klasično definicija gibalne količine je $p = mv$). Seveda se mora gibalna količina v vseh fizikalnih modelih ohranjati, če je le sunek zunanjih sil na nek opazovani sistem enak nič.



Poglejmo si ohranitev gibalne količine na zelo poenostavljenem primeru. Naj se enaki telesi (z maso m) premikata po osi x v nasprotnih smereh s hitrostma $v_1 = v$ in $v_2 = -v$ in neprožno trčita. Ker sta masi enaki in hitrosti nasprotno enaki, sta tudi gibalni količini nasprotno enaki (mv in –mv, pred trkom je torej skupna gibalna količina obeh teles enaka $p = mv - mv = 0$), in ker se po neprožnem trku telesi zlepita, je tudi hitrost zlepljenega telesa na koncu enaka nič. Tukaj posebej poudarimo, da je kinetična energija obeh teles šla v segrevanje in deformacijo teles – kinetična energija se torej ni ohranila (kinetična energija se ohrani le pri idealnem prožnem trku).

Ker pa vemo, da se hitrosti za nek drug gibajoči opazovalni sistem S' transformira po že izpeljanem pravilu ($w' = (w-v)/(1-vw/c^2)$), se spet izkaže, da klasični zapis dogodkov brez upoštevanja časa (brez četverce prostor-čas) ni ustrezen. Za oba sistema bi po trku morala biti gibalna količina enaka začetni, in če upoštevamo postulate relativnosti, to tudi zares velja.

Opis dogodka bomo še dodatno poenostavili, tako da se bo opazovalni sistem S' gibal z enako hitrostjo kot telo 1 pred trkom. Hitrost v1' za sistem S' bo tako enaka nič ($v1' = 0$), saj telo in opazovalec v sistemu S' potujeta z enako hitrostjo v isto smer. Za telo dva pa bo opazovalec v sistemu S' izmeril hitrost $V_2' = (v_2-v)/(1-vv_2/c^2)$ = $\mathbf{-2v/(1+v^2/c^2)}$, saj velja, da je $v_2 = -v$.

Četverec gibalne količine je v splošnem:

$\underline{\mathbf{p}}$ **=** $\mathbf{(mc\Upsilon,\ m\Upsilon v_x,\ m\Upsilon v_y,\ m\Upsilon v_z)}$

Ker se telesi premikata po osi x, velja: $\underline{\mathbf{p}}$ **=** $\mathbf{(mc\Upsilon,\ m\Upsilon v) = m\Upsilon(c,\ v).}$

Pred trkom je skupna gibalna količina za sistem S enaka:

$\underline{\mathbf{p}} = m\Upsilon(c, v) + m\Upsilon(c, -v) = m\Upsilon(2c, 0)$ $\mathbf{= 2m\Upsilon(c,\ 0).}$

Člen $M = 2m\Upsilon$ nekateri imenujejo relativistična masa, v resnici se v tem členu skriva celotna energija – **zaloga energije.**

Za sistem S', ki pred trkom potuje v isto smer kot prvo telo pa je skupna gibalna količina enaka četvercu:

$\underline{\mathbf{P}}' = m(c, 0) + m\Upsilon'(c, v_2')$**.**

Ker je pred trkom $v_2' = v' = -2v/(1+v^2/c^2)$, in ker je $\Upsilon' = 1/(1 - v'^2/c^2)^{1/2}$, velja za Υ':

$\Upsilon' = 1/(1 - 4v^2/((1+v^2/c^2)^2c^2))^{1/2} = c(1+v^2/c^2)/(c^2(1 + v^2/c^2)^2 - 4v^2)^{1/2}$

$\Upsilon' = (1+v^2/c^2)/(1 + v^4/c^4 - 2v^2/c^2)^{1/2}$.

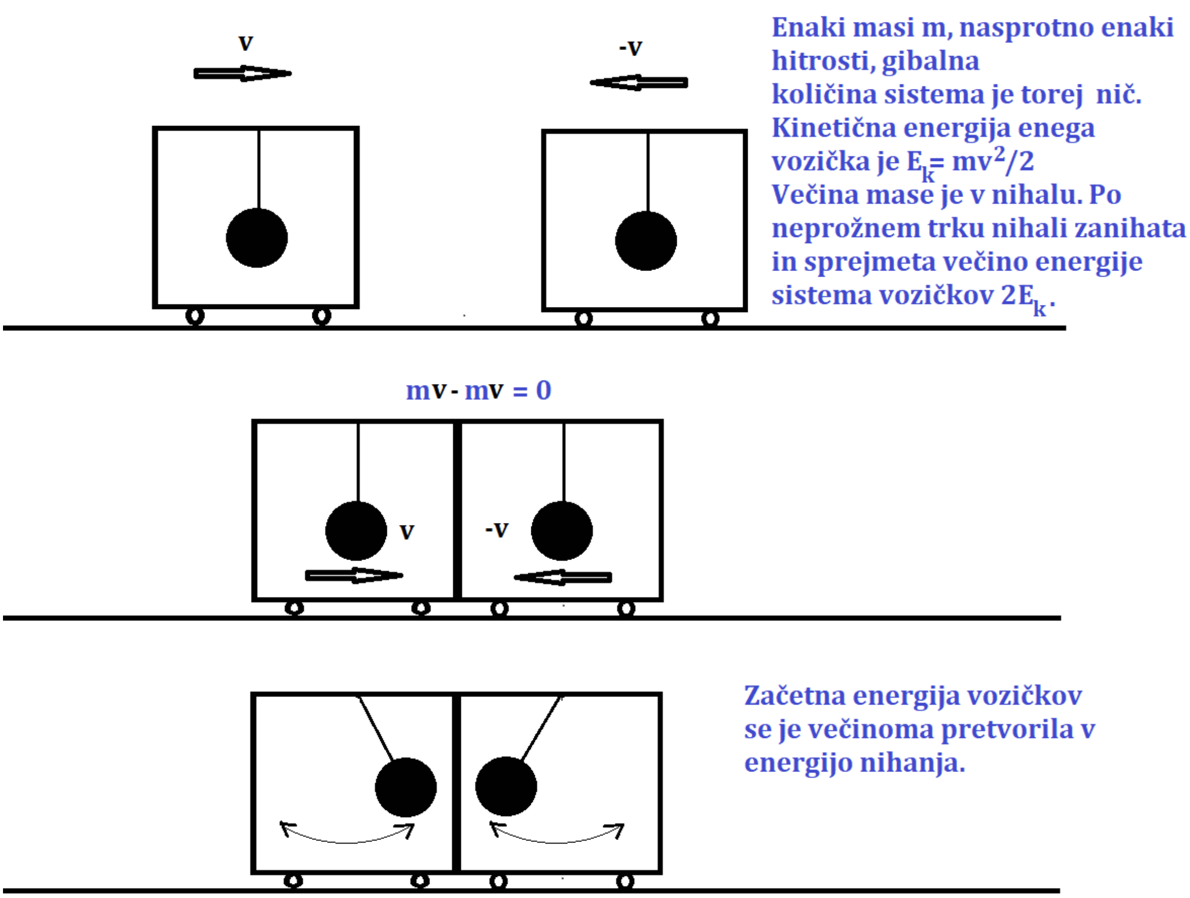
$\Upsilon' = (1+v^2/c^2)/((1 - v^2/c^2)^2)^{1/2} = (1+v^2/c^2)/(1 – v^2/c^2)$
Od koder sledi:
$\underline{\mathbf{P}}' = m(c, 0) + m\Upsilon'(c, -v') = m(c, 0) + m((1+v^2/c^2)/(1 – v^2/c^2))(c, -2v/(1+v^2/c^2))$.

Po množenju in seštevku komponent dobimo končno gibalno količino $\underline{\mathbf{p}}'$ v sistemu S':
$\underline{\mathbf{P}}' = \mathbf{2m\Upsilon^2(c, -v) = (2m\Upsilon)\Upsilon(c, -v) = M\Upsilon(c, -v)}$
Če sedaj zapis, rezultat, preverimo za mirujoč sistem (v' = 0 in s tem je $\Upsilon' = 1$), spet dobimo pričakovan rezultat $\underline{\mathbf{p}} = M(c,0) = 2m\Upsilon(c, 0)$.
Kjer je izraz $M = 2m\Upsilon$, člen ki ga izmeri mirujoč opazovalec. Ta rezultat kaže na razlog, zakaj nekateri zelo radi uporabljajo pojem relativnostične mase $m_r= m\Upsilon = m/(1-v^2/c^2)^{1/2}$. Simbol m ali tudi kdaj m_o, je mirovna masa telesa pri $v = 0$. Del stroke zelo nasprotujejo pojmu relativnostne mase (ker je v resnici nekoliko zavajajoč), in če že, raje govorijo o polni energiji $E = Ek + Eo = mc^2\Upsilon$, kjer velja, da je ta paket energije tisti, na katerega delujejo sile (po starem je to ekvivalent mase in je v tem primeru za gibajoče telo enak $E/c^2 = m\Upsilon$).
V resnici je zapis četverca gibalne količine s členom $mc\Upsilon = E/c$ veliko bolj konzistenten od klasične oblike zapisa, tudi pri majhnih hitrostih. Zakaj? Pri klasični fiziki ostane gibalna količina sistema nedorečena - to kaže že omenjeni poseben primer neprožnega trka (ko je na koncu hitrost enaka nič). Pri opisanem trku namreč gre vsa kinetična energija v segrevanje in deformacijo teles, a klasični matematični zapis tega ne razkriva. Četverec gibalne količine $\underline{p} = (mc\Upsilon, m\Upsilon v_x, m\Upsilon v_y, m\Upsilon v_z) = (E/c, m\Upsilon v_x, m\Upsilon v_y, m\Upsilon v_z)$ pa to s členom E/c prepričljivo nakazuje. Prvi člen četverca tako pove, koliko energije ima nek delec na razpolago. To ni le zgolj znamenita količino energije $E_o = m_oc^2$, ampak tudi prispevek, ki ga s sabo nosi gibalna količina in se nahaja v Lorentzovem členu Υ, saj se prvi člen četverca zapiše kot $m_oc\Upsilon$ in se, recimo v primeru končnega mirovanja sistema teles, v njem odraža zaloga energije (posameznih gibalnih količin) pred trkom. V našem primeru neprožnega trka je to celo (za gibajoči opazovalni sistem S') izraz s produktoma Lorentzovih členov $\mathbf{(2m\Upsilon)\Upsilon = M\Upsilon}$.
Pa še – za mirujoči sistem velja po trku, da je energija obeh vozičkov, ker mirujeta $E_2 = m_xc^2\Upsilon = m_xc^21 = m_xc^2$. Pred trkom pa je $p = 2m\Upsilon c = E_1/c$, od koder sledi $E_1 = 2m\Upsilon c^2$. Če predvidevamo, da gre vsa energija v notranjo (združenemu telesu se poviša temperatura T, hitrost molekul v_m, torej kinetična energija E_{mk} molekul [velja $E_{mk} \propto kT \propto m_mv_m^2$] - no, temu ni čisto tako, nekaj energije gre v deformacijo teles, a se lahko tej predpostavki kar približamo), in da se skupna energija ohranja ($\mathbf{E_1 = E_2}$), gre iz ene oblike v drugo, potem dobimo izraz:
$\mathbf{m_xc^2 = 2m\Upsilon c^2}$.
Od koder sledi, da je nova masa m_x po trku enaka:
$\mathbf{m_x = 2m\Upsilon}$
To je rezultat, ki direktno dokazuje, da je masa samo ena od oblik energije, in če bi stehtali tako zlepljeno telo (z zelo natančno tehtnico), bi izmerili maso m_x in seveda velja $\mathbf{m_x > 2m}$.
In za koliko je masa m_x večja od začetne mirovne mase pred trkom 2m? Za:

$\Delta m = 2m\Upsilon - 2m =$ **$2m(\Upsilon - 1)$.**
Zagotovo lahko zatrdimo, da velik del te (kinetične) energije gre v notranjo energijo, v povišanje temperature: $\Delta mc^2 = 2m(\Upsilon - 1)c^2 \propto \Delta T$.

Razumevanje povedanega je lahko dober argument, zakaj moramo v konzistentni sliki »nove« mehanike klasično gibalno količino pomnožiti z Lorentzovim členom ali, če hočete, zakaj nekateri govorijo o relativistični masi. Načrtovanje pospeševalnikov delcev (recimo izračun polmera pospeševalne cevi $r = m\Upsilon v/(eB)$ **) je eden najbolj čistih dokazov pravilnosti Lorentzove in Einsteinove nove mehanike, ki temelji na četvercu metrike prostor-časa in danes očitnih dejstvih, da je hitrost svetlobe konča, da je čas vezan na lokalni opazovalni sistem ter, da je polna energija telesa E:**
E = $mc^2\Upsilon = mc^2/(1-v^2/c^2)^{1/2} = mc^3/(c^2-v^2)^{1/2}$**.**
Z dokazom ohranitve energije v obeh opazovalnih sistemih za primer prožnega trka, pred in po trku pa se soočite sami (namig, E = $\Upsilon m_1c^2 + \Upsilon m_2c^2 = ...$, oziroma $E_k = m_1c^2(\Upsilon - 1) ...$).

Pa zaključimo to vajo z zelo preprostim modelom snovi, ki neprožno trka. Spodaj je slika, ki poenostavi telo, ki ga sestavljajo atomi in vezi med njimi (v samem telesu ti atomi, elektroni, nukleoni tudi nihajo, delno potujejo - termično gibanje), v zelo lahko ogrodje (škatlo), v katerem je masivno nihalo (naj nosi večino mase). Ko dve taki enaki telesi potujeta druga proti drugi z nasprotno enakima hitrostma in neprožno trčita, se ustavita in zdi se celo, kot da bi kinetična energija teles $2*mv^2/2$ nekam izginila. A če pogledamo dogajanje po trku - obe nihali zanihata, in če je nihalo zelo masivno napram lahkemu ogrodju vozička, večino energije preide v nihali (kjer se pretvarja energija iz kinetične v potencialno in nazaj ...). V resnici se je sedaj večino kinetične energije premega gibanja spremenilo v energijo nihanja nihal. Temu rečemo v snovi, da se je energija delno pretvorila v notranjo energijo - termično intenzivnejše gibanje nukleonov, elektronov ... In to je lep prikaz - kjer lahko slutimo princip dogajanja v snovi med trki in delno tudi, da je masa povezana z energijo.



Zorkotov mehanični model neprožnega trka in prenos energije po trku v gibanje osnovnih gradnikov snovi, tudi v povezavi z maso in energijo:

$m_x = E/c^2$.

Kot smo že izračunali, velja, da je nova masa m_x po trku (vozička mirujeta) enaka:

$\mathbf{m_x = 2m\gamma}$

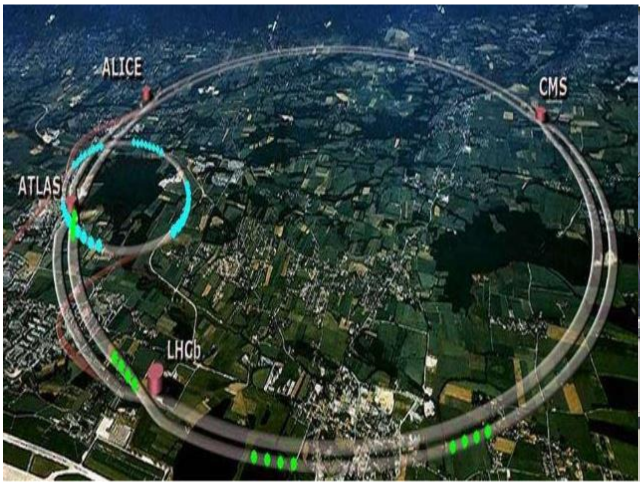
In to je vsekakor več kot začetna masa 2m. Sedaj tudi vidimo zakaj, v našem preprostem modelskem primeru je to na račun nihanja nihal - v realni snovi pa večinoma na račun termičnega gibanja atomskih jeder, elektronov, lahko tudi zaradi nihanj kristalnih struktur, če so prisotne ...

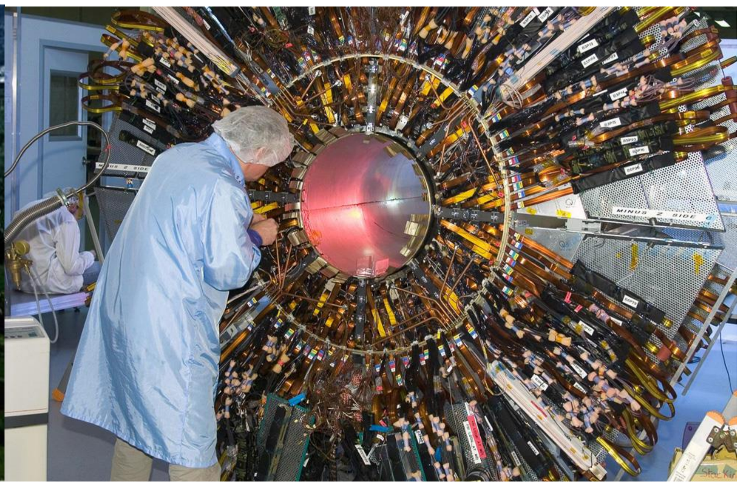
Pri sili na nek delec ni dovolj, da upoštevamo samo njegovo mirovno maso, ampak moramo upoštevati energijski paket, ki ga delec nosi s sabo, to je vrednost **polne energije**, deljene s $\mathbf{c^2}$ (povedano zapišemo kot $E/c^2 = m\Upsilon$).

V klasični fiziki se centripetalna sila zapiše kot $\mathbf{Fc = mv^2/r}$ (to je sila na masni delec) v izboljšani relativistični sliki pa kot sila na polno energijo delca (deljeno s c^2): $Fc= (E/c^2)v^2/r$.

Tako velja za magnetno polje B in naboj e, ki se premika pravokotno na magnetno polje (kroži) s hitrostjo v, naslednji dopolnjeni izraz.

$\mathbf{Fc= evB = (E/c^2)v^2/r = m\Upsilon v^2/r}$





Izračunajmo Lorentzov člen pri znamenitem pospeševalniku v Cernu in magnetno polje B, ki ukrivlja poti protonov (prej elektronov) v cevi z efektivnim polmerom R = 2804 m.

V pospeševalniku LHC (Large Hadron Collider – prvi zagon leta 2008, v letu 2012 so potrdili Higgsovih bozonov) vsak proton doseže energijo E_k = 7 TeV = 7 10^{12} eV (seveda se načrtuje tudi višje energije). Protoni potujejo v nasprotnih smereh in v določenih točkah se curka iz obeh tunelov križata – trčita – in tako se pri trkih sprosti ogromno energije, delcev, katerih potrditev iščemo – prvi uspešen cilj je bil seveda tudi Higgsovih bozonov.

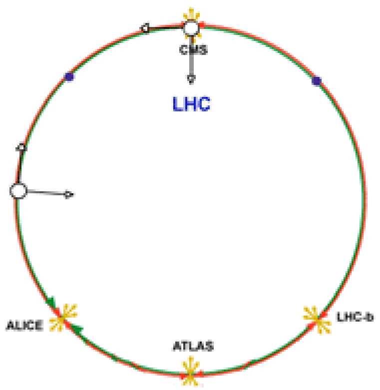
Ker pospešujemo protone, bomo za oceno Lorentzovega člena uporabili maso protona – produkt protona in kvadrata svetlobne hitrosti je $mc^2 = 9{,}383\cdot10^{-4}$ TeV - kar je veliko manj kot končna kinetična energija samega protona v pospeševalniku LHC (E_k = 7 TeV). Kinetična energija hitrih delcev se zapiše kot $E_k = mc^2(\Upsilon - 1)$, in če izpostavimo Lorentzov člen $(\Upsilon - 1) = E_k/(mc^2)$ in predvidevamo, da bo Υ veliko večji od 1 (torej bo $(\Upsilon - 1) \approx \Upsilon$), dobimo izraz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{E}{m\ c^2}$$

Masa protona je $m = E/c^2 = 938{,}3$ MeV/c^2. Tako dobimo za produkt $mc^2 = 9{,}383\cdot10^{-4}$ TeV.
$\Upsilon = E_k/(mc^2) = 7\text{ TeV}/9{,}383\cdot10^{-4}\text{ TeV} = 7460$
$\boldsymbol{\Upsilon = 7460 \quad \Rightarrow \quad v = 0{,}999999991\cdot c}$ - tako kar dobro velja enakost: $\boldsymbol{v \approx c}$
Torej smo protone pospešili praktično do svetlobne hitrosti (**no, ne čisto**).

Kolikšno pa je magnetno polje v ceveh pospeševalnega tunela?
Velja znana enačba za centripetalno silo: $F_c = evB = m\Upsilon v^2/R$

$$B = \frac{\gamma m\ v}{eR} \approx \frac{\gamma m\ c^2}{ceR} = \frac{E/e}{cR}$$



B ≈ 7 TeV /(3·10^8·e·2804 m^2/s) = 70/(8.412) T = 8.32 T

To je izjemna gostota magnetnega polja – take vrednosti najdemo v vesolju recimo na belih pritlikavkah (kjer se magnetno polje - vrtilna količina se ohranja - s kolapsom zvezde poveča, preko povezave $B \propto 1/R^2$, do izjemnih vrednosti).
Da ustvarimo tako izjemno centripetalno silo, skrbi 1232 magnetnih dipolov nameščenih v osmih lokih. Vsak dipol ima magnetno delovanje na dolžini 14,3 m, kar da skupno dolžino:
1232 × 14,3 = 17618 m
Tako bolj natančno določimo t. i. polmer ukrivljenosti ("bending radius"):
Rb =17618m/(2π) ⇒ Rb = 2804 m.

Zakaj je bolje pospeševati protone, kot elektrone? Odgovor podajo spodnje enačbe (Larmorjeva formula o sevanju pospešenega električnega naboja).

$$\frac{m \cdot v^2}{\rho} = e \cdot v \cdot B_\perp \Rightarrow \rho = \frac{m \cdot v}{e \cdot B_\perp} \xrightarrow[v \approx c]{m = \gamma \cdot m_0} \rho = \frac{\gamma \cdot m_0 \cdot c}{e \cdot B_\perp}$$

$$P = \frac{2e^2 c \gamma^4}{3 \cdot 4\pi\varepsilon_0 \rho^2} \longrightarrow P = \left[\frac{e^4}{6 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot m_0^2 \cdot c}\right] \gamma^2 \cdot B_\perp^2$$

Pri elektronih, ker so lahki, sicer hitreje dosežemo visoke hitrosti. A vsako krožno gibanje je hkrati pospešeno gibanje in naboji tako med kroženjem sevajo - to pa pomeni izgube, ki jih je potrebno nadomestiti. Zgornja enačba kaže, da je moč sevanja sorazmerna z γ^4 in tako je sevanje elektronov 10^{13} večje od krožečih protonov. ρ je polmer kroženja.
Za elektrone so zato bolj primerni linearni pospeševalniki.
http://www.lhc-closer.es/taking_a_closer_look_at_lhc/0.relativity

POVZETEK POSEBNE TEORIJE RELATIVNOSTI
Ponovimo misel iz začetka,
- matematični opis relativnosti je na koncu zgolj neke vrste Pitagorov izrek z dodano dimenzijo (kateto) časa pomnoženega s hitrostjo svetlobe (ct).
Posebna teorija relativnosti upošteva:

- da je opis narave iz vseh nepospešenih opazovalnih sistemov enak, to pomeni, da so fizikalni zakoni povsod enaki in to seveda velja tudi za merjenje razdalj (metrika ds = ds'),
- da je hitrost svetlobe v praznem prostoru končna (c = 299792458 m/s),
- da iz prve in druge točke nujno izhaja, da čas ni absoluten, in da je čas vezan na opazovalni sistem (pretvorba me časoma je: $dt = \Upsilon d\tau = d\tau/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, kjer je (v) hitrost opazovalnega sistema v katerem opazovalec izmeri lasten čas τ).

Iz povedanega sledijo enačbe za delec z maso m, za gibanje s hitrostjo (v) v smeri x:

c = 299792458 m/s	**- hitrost svetlobe (e. m. valovanja) v praznem prostoru**
$\Upsilon = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$	**- Lorentzov člen**
t	**- čas v mirujočem opazovalnem sistemu**
τ	**- lasten čas v gibajočem opazovalnem sistemu**
$dt = \Upsilon d\tau = d\tau/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$	**- povezava med časoma iz dveh koordinatnih sistemov**
$\underline{ds'} = ds = (cdt', 0) = (cdt, dx)$	**- vektor, četverec prostor-časa za spremembo lege točke**
$\underline{v} = (c, 0) = (c\Upsilon, \Upsilon v)$	**- četverec hitrosti**
$\underline{p} = (cm, 0) = (mc\Upsilon, m\Upsilon v)$	**- gibalna količina delca z maso m**
$\underline{F} = \Upsilon^4(mav/c, ma)$	**- četverec sile za pospeševanje v x smeri**

Velikosti vektorjev so Pitagorov izrek *

$ds^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2 = -(cdt')^2$	**- kvadrat razdalje med točkama, metrika**
$-c^2 = -(c\Upsilon)^2 + (\Upsilon v)^2$	**- povezava med hitrostjo in Lorentzovim členom**
$p = m\Upsilon v$	**- velikost gibalne količina delca z maso m in hitrostjo v**
$E^2 = (c^2m)^2 + (cp)^2$	**- povezava med polno energijo in gibalno količino, velja splošno za vse smeri**
$F = \Upsilon^3 ma$	**- velikost sile v x smeri**

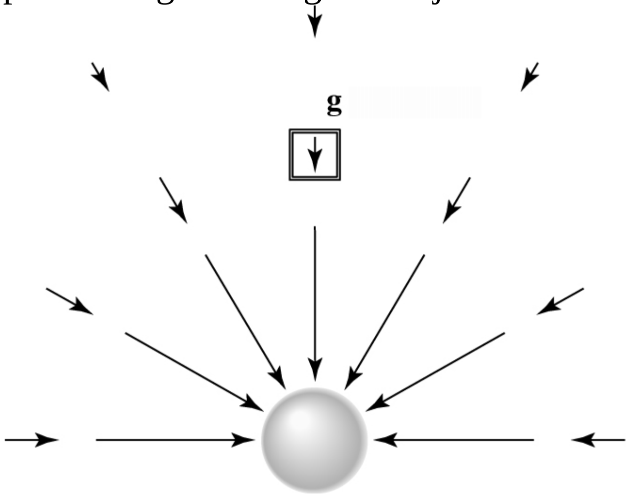
Kako se spremeni metrika prostor-časa v gravitaciji (hitrost 'v' ni več konstantna)?

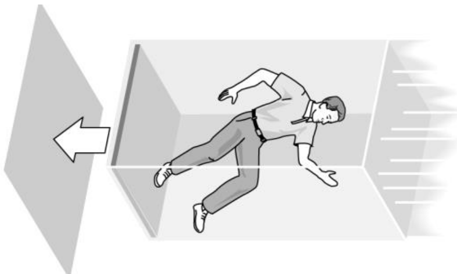
Obravnavali bomo primere, kjer je masa M porazdeljena v sferi, krogelno simetrične objekte, kar pa seveda kar dobro velja za zvezde, planete in kjer je posledično razdalja (r), od središča do obravnavanega telesa, odločilna za dinamiko in gravitacijsko silo ($F = GmM/r^2$), ki jo čuti neko telo z maso m (tako trdi Newton, Einstein pa je zadevo nekoliko drugače zastavil, in sicer z domislico, da masa z gravitacijo ukrivlja prostor).
Vemo, da se ubežna hitrost (v) iz določene zvezde (s polmerom r in maso M) izračuna kar iz energijskega zakona. Zapišimo energijo E v neskončnosti in na zvezdi (v našem primeru vsoto kinetične [$m_o v^2/2$] in potencialne energije [$-Gm_oM/r$]). Ker predpostavimo, da se energija E ohranja (E_nsekončno = E_na_razdalji_r), bomo izbrali taki začetni vrednosti energij telesa z maso m, da bo v neskončnosti vsota nič (v neskončnosti bo hitrost v = 0, člen 1/r pa gre proti nič), velja:

E = Ek +Ep

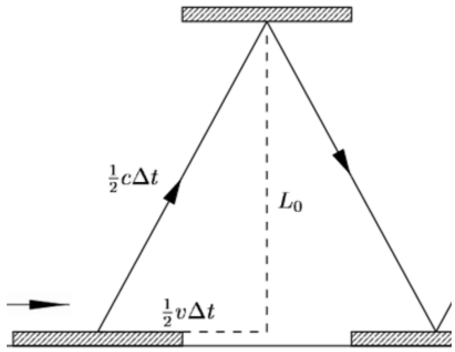
E_nsekončno = E_na_razdalji_r
$0 - 0 = m_o v^2/2 - G m_o M/r$
$\mathbf{v^2 = 2GM/r}$
$\mathbf{v = (2GM/r)^{1/2}}$
$\mathbf{r_s = 2GM/c^2}$

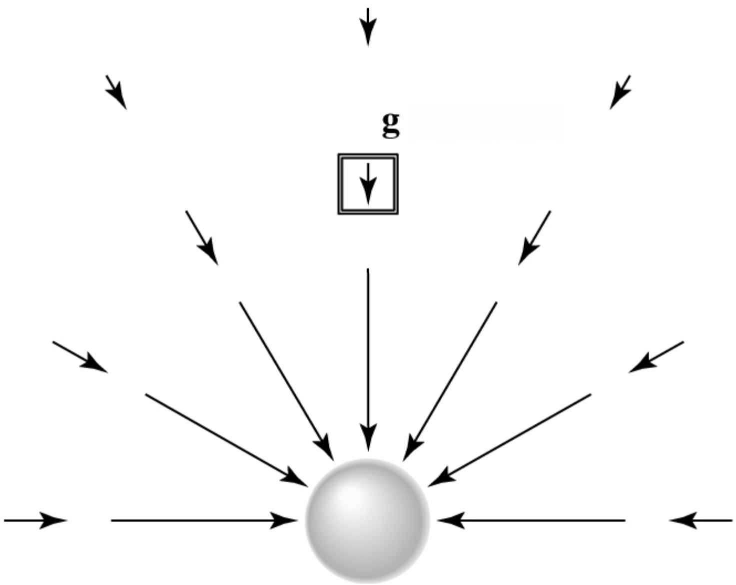
Poleg ubežne hitrosti ($\mathbf{v = (2GM/r)^{1/2}}$), smo izpeljali še polmer telesa z ubežno hitrostjo svetlobe ($Rs = 2GM/c^2$). Iz enačbe sledi, da je $v^2 = c^2 = 2GM/r$. Namesto hitrosti telesa v, smo privzeli hitrost svetlobe c, kar bi veljalo za foton (svetlobo), ki pod nekim mejnim zvezdnim radijem $\mathbf{r_s = 2GM/c^2}$, ne bi uspel zapustiti zvezde. Na ta način smo hkrati izračunali takoimenovano dogodkovno obzorje (s polmerom $\mathbf{r_s}$) – $\mathbf{r_s}$ imenujemo tudi Schwarzschildov polmer dogodkovnega obzorja ali horizonta.





Postavi se vprašanje, kako izraziti hitrost v Lorentzovem členu $\Upsilon = 1/(1 - v^2/c^2)$ v gravitacijskem polju? Poskusimo z ravno izpeljanim členom ($\mathbf{v^2 = 2GM/r}$). Še prej naredimo miselni eksperiment z gravitacijo in gibanjem. Imamo dva opazovalca. Prvi opazovalec naj bo blizu zvezde in naj pada s pospeškom $g = GM/r^2$ (v trenutku opazovanja pa naj ima za oddaljenega opazovalca hitrost $\mathbf{v = (2GM/r)^{1/2}}$). V tem primeru opazovalec (ki pada) ne čuti teže (gravitacije), zanj velja podobna metrika kot za opazovalca v avtu (krajevno istoveten dogodek opiše kot $dS'^2 = - c^2 dt'^2$).





Drugi opazovalec je zelo daleč in vidi posledice delovanja gravitacije (telo iz neskončnosti po dolgem popotovanju pridobi pri telesu z maso M hitrost **v = (2GM/r)$^{1/2}$**). Če se osredotočimo na enak eksperiment, kot v uvodu – vozilo, kjer potnik posveti na stropno zrcalo (a tokrat pada proti centralni masi, recimo zvezde) – in naj bo čas dt ali dt' zelo kratek, velja za dani trenutek prav enaka povezava, kot pri nepospešenem gibanju ($-(cdt')^2 = -(cdt)^2 + (vdt)^2$, oziroma **dt = γdτ** ali **dτ = (1 – v^2/c^2)$^{1/2}$dt = (1 – 2GM/(rc^2))$^{1/2}$dt**). Velja pa tudi **načelo ekvivalentnosti, ki v splošni teoriji relativnosti upošteva, da ni moč razločevati učinka težnostnega polja v nepospešenem opazovalnem sistemu od učinka pospeševanja opazovalnega sistema v prostoru, kjer ni težnostnega polja.** Za radialni premik **dr'** vstavimo znano povezavo **dr' = dr/(1 – v^2/c^2)$^{1/2}$.** Naš razmislek pa še podkrepimo z ugotovitvijo, da tudi svetloba čuti gravitacijo, in da foton (delec svetlobe), ki se oddaljuje od (recimo) zvezde, izgublja energijo (Ef = hν = h/λ) in se mu zato valovna dolžina λ veča – tozadevno se ta pojav imenuje gravitacijski rdeči premik. Ta efekt se zato pozna tudi na frekvenci in posledično na sinhronizaciji ur. Z ubežno hitrostjo smo torej elegantno povezali hitrost in gravitacijo (**v = (2GM/r)$^{1/2}$**) in to nas pelje do končne rešitve. Če torej v metrično enačbo (v dS razdaljo štirirazsežnega prostor-časa) vstavimo za **v^2** izraz **2GM/r**, dobimo naslednjo povezavo (privzamemo, da za trenutek velja metrika, ki smo jo že opisali pri nepospešenem relativnem gibanju):

$$ds^2 = -c^2(1-\frac{v^2}{c^2})dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)$$

- ker je $v^2 = 2GM/r$, velja:
$ds^2 = -c^2dt^2(1 - 2GM/(c^2r)) + dr^2/(1 - 2GM/(c^2r)) + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\ d\varphi^2)$

Po substituciji dobimo izraz, ki se imenuje Schwarzschildova metrika. Izpeljal jo je Karl Schwarzschild in to leta 1915 – isto leto kot je Albert Einstein objavil enačbe polja splošne teorije relativnosti (ki seveda vključuje gravitacijo) in Schwarzschildova metrika je rešitev Einsteinovih enačb za sferično porazdeljeno maso (leta 1916 Karl Schwarzschild na fronti zboli in doma umre – bil je prostovoljec). Na veliko veselje se izkaže, da ta naš »preprost« premislek potrjujejo tudi meritve in potrjuje seveda dosledna izpeljava znotraj splošne teorije relativnosti iz Einsteinovih enačb polja. Enačbe so ponazorjene z Einsteinovim tenzorjem: $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$ **kjer velja** $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\, g_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Enačbe so torej tenzorske. Enačijo ukrivljenost prostor-časa, izraženo preko Einsteinovega tenzorja, z energijo in gibalno količino, ki ju določa napetostni tenzor. Tu je $R_{\mu\nu}$ Riccijev tenzor, R Riccijev skalar, $g_{\mu\nu}$ metrični tenzor in $T_{\mu\nu}$ napetostni tenzor (v vakuumu je nič).
Pot preko sistema enačb je seveda precej zahtevnejše, a rezultat je enak in kdaj izpeljava zakrije razumevanje samega fenomena. Schwarzschildova metrika, ki je rešitev Einstenovega sistema enačb, je torej:

$$ds^2 = -c^2\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)$$


Karl Schwarzschild (1873-1916)

$$\mathbf{-c^2d\tau^2 = -c^2dt^2(1 - 2GM/(c^2r)) + dr^2/(1 - 2GM/(c^2r)) + r^2d\Omega^2}$$

Sedaj že z gotovostjo lahko trdimo, da je prispevek gravitacije k metriki zares tak, kot smo sklepali pri našem miselnem eksperimentu. Torej - če ima neko telo lastno dinamiko, gibanje – pa sama gravitacija k temu prispeva še dodatno metriko časa in prostora s členi, ki smo jih ravnokar izpeljali. In ta Schwarzschildova rešitev Einsteinovih enačb polja je za astronomijo dejansko najbolj relevantna (vsaj na nivoju zvezd in galaksij). Iz nje bomo izpeljali korekcijo časa pri satelitih, gravitacijski rdeči premik, ukrivitev svetlobe ob masivnih nebesnih telesih, kot zasuka glavne osi pri precesiji perihelija Merkurja (tudi ostalih planetih) ... Še enkrat ponovimo misel iz začetka teksta – in sicer, da je matematični opis relativnosti na koncu zgolj Pitagorov izrek z dodano dimenzijo (kateto) časa pomnoženega s hitrostjo svetlobe (ct) – tukaj bi še dodali, da upoštevamo tudi gravitacijo (ukrivljenost prostora).
Da se ne bi bali pojma »ukrivljenost prostora«, omenimo le, da recimo gibanje satelita okrog Zemlje ali Sonca lahko enakovredno opišemo tako z Newtonovo sliko – kjer sila gravitacije, recimo Zemlje, deluje na satelit in zato tudi le ta potuje okrog Zemlje – kot z Einsteinovo sliko, ki pravi, da masa Zemlje krivi prostor in satelit le sledi tej ukrivljenosti. Kot recimo »padajoči« krovec, ali nekdo v odtrganem liftu - ki prosto pada [to seveda ni priporočljivo, razen v lunaparkih za kako sekundo] – torej ne čuti teže, ampak le sledi ukrivljenosti prostora - tudi čas zato teče drugače glede na oddaljenega opazovalca.

Za raven prostor velja že znana povezava za lego (dinamiko) delca in metrični tenzor je naslednji $g_{\mu\nu}$:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

Za prostor okrog sferičnega telesa (masivne krogle, planeta, zvezde) pa velja naslednja transformacija za metrični tenzor $g_{\mu\nu}$ in vektor (-cdt, dr, dϑ, dφ), po analogiji posebne teorije relativnosti:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$$

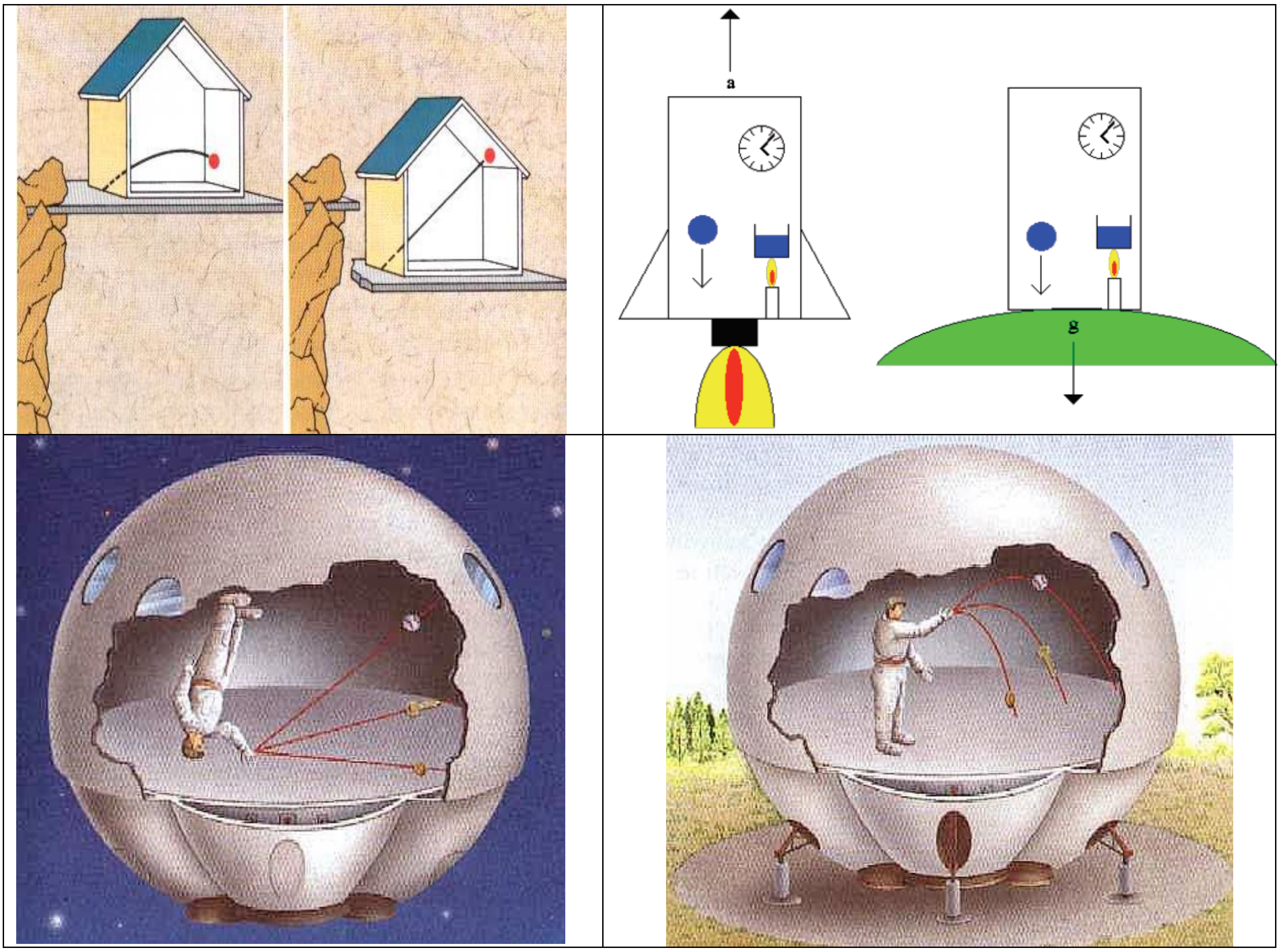
$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(1-\frac{2GM}{rc^2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\frac{2GM}{rc^2})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2Gm}{rc^2}\right)c^2\mathrm{d}t^2 + \left(1-\frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$$

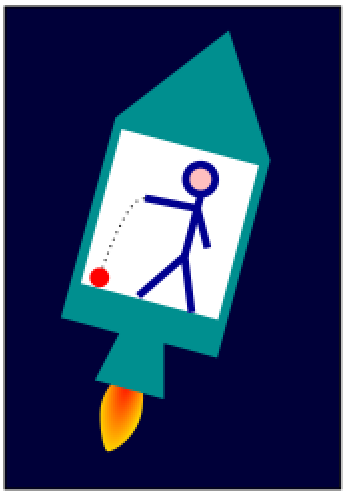
Bolj korekten zapis tenzorskega izračuna za metriko (kvadrat delčka razdalje) ds^2 preko metričnega tenzorja $g_{\mu\nu}$ in četverca za prostor-čas (cdt, dr, dθ, dϕ) je:

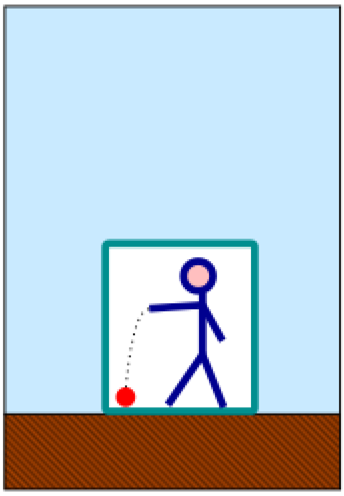
$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = \textbf{(cdt, dr, d}\boldsymbol{\theta}\textbf{, d}\boldsymbol{\phi}\textbf{)}\begin{bmatrix} -(1-\frac{2GM}{rc^2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\frac{2GM}{rc^2})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \textbf{cdt} \\ \textbf{dr} \\ \textbf{d}\boldsymbol{\theta} \\ \textbf{d}\boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = -c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{1-\frac{2GM}{c^2r}}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$$



Načelo ekvivalentnosti v splošni teoriji relativnosti upošteva, da ni mogoče razločevati učinka težnostnega polja v nepospešenem opazovalnem sistemu od učinka pospeševanja opazovalnega sistema v prostoru, kjer ni težnostnega polja. Velja tudi, da sta težnostna in vztrajnostna masa enaki. Sledi opis nekaj primerov. Zanimiva je recimo slika, ki kaže hišo, ki prosto pada in v njej ni moč opaziti nobenega krivega gibanja zaradi gravitacije - žoga potuje po premici, kamor smo jo zalučali. Slika (fizika) sistema pospešenega z raketnim motorjem da enak efekt kot recimo teža na Zemlji (pospešeno padanje teles, vzgon – ki ga kaže oblika in smer plamena sveče, itn). Slika satelita kaže, da je kroženje okrog zemlje dejansko padanje s pospeškom g (ker imamo tangentno hitrost, krožimo in tako nikoli ne zadenemo Zemlje) in zato astronavti ne čutijo teže – telesa v satelitu potujejo premo. Ko pa satelit pristane na Zemlji, pa so vsi izmeti predmetov spet videti kot kriva gibanja.





Glavni premislek naše izpeljave je bila torej Einsteinova logika – da telo, ki prosto pada (s pospeškom prostega pada), ne čuti gravitacije – od tod tudi ideja o ukrivljenem prostor-času. Einstein 1915 napove odklon žarkov za 1.75", če ti potujejo tik ob površju Sonca. Ta rezultat je 29. maja 1919 potrdil Arthur Eddington – vodil je eno od ekspedicij, ki je tudi eksperimentalno potrdila spremembe lege Soncu navidezno bližnjih zvezd med Sončevim mrkom. Ker foton nima mase (m = 0), je to ukrivitev težko pojasniti z Newtonovim gravitacijskim zakonom ($F_g = GMm/R^2$). To je še en argument, da je bolje govoriti o ukrivljenem prostor času (krivijo ga telesa v vesolju, tudi druge oblike energije), **ki vpliva na vsa gibanja, tudi na svetlobo.** Ukrivljenost prostor-časa plastično ponazarja shematična prispodoba Zemlje, ki z gravitacijo ukrivi bližnji prostor - ponazorjen z mrežo, ki se ukrivi, deformira. Ta slika seveda nekoliko zavaja, a veliko boljše prispodobe ni. Torej - če privzamemo ukrivljen prostor-čas za opis sveta, naenkrat sila gravitacije ni več relevantna, saj njeno vlogo v dinamiki nekega telesa prevzame ukrivljen prostor-čas (svetloba, ki se ukrivi ali recimo oseba, ki prosto pada ali satelit, ki kroži (ali potuje po elipsi), se gibljeta tako, kot to določa ukrivljen prostor-čas). A ker je sila gravitacije zelo prikladna, priročna, ukoreninjena, se ji seveda pri opisu sveta ne bomo čisto odrekli.

Velikokrat enačbo metrike poenostavimo s Schwarzschildovim radijem:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

$$-c^2d\tau^2 = -c^2dt^2(1 - r_s/r) + dr^2/(1 - r_s/r) + r^2d\Omega^2$$

Za razmerje lastnega časa $d\tau$ v koordinatnem sistemu, ki se premika z dogodkom v gravitaciji in časom dt merjenega v koordinatnem sistemu daleč vstran od masivnih teles, velja naslednja povezava. Metriko delimo z $-dt^2c^2$.

$$-c^2d\tau^2 = -c^2dt^2(1 - r_s/r) + dr^2/(1 - r_s/r) + r^2d\Omega^2$$

$$d\tau^2/dt^2 = (1 - r_s/r) - (dr^2/(c^2dt^2))(1/(1 - r_s/r)) - r^2d\Omega^2/(c^2dt^2)$$

Oblika z radialno ($v_r^2 = dr^2/dt^2$) in tangentno hitrostjo ($v_t^2 = r^2d\Omega^2/dt^2$) je:

$$d\tau^2/dt^2 = (1 - r_s/r) - (v_r^2/c^2)(1/(1 - r_s/r)) - v_t^2/c^2$$

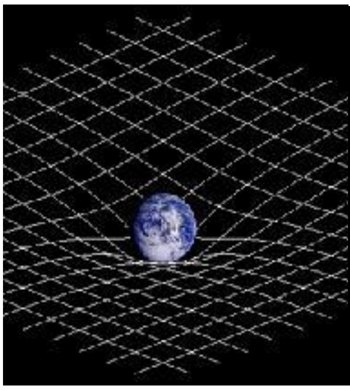
Če je gravitacija neizrazita, velja $r_s/r = 0$ (to pomeni, da je centralna masa majhna ali smo zelo daleč od centralne mase, zvezde), potem pridemo do klasične oblike razmerja med lastnim časom $d\tau$ in koordinatnim časom dt, in ker velja $v^2 = v_r^2 + v_t^2$.

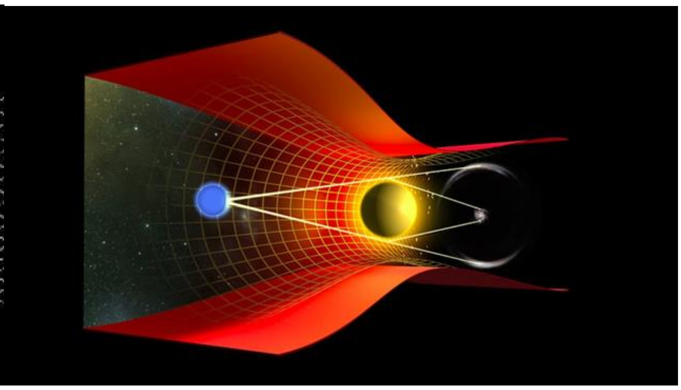
$$d\tau^2/dt^2 = (1 - 0) - (v_r^2/c^2)(1/(1 - 0)) - v_t^2/c^2 = 1 - v_r^2/c^2 - v_t^2/c^2 = 1 - v^2/c^2$$

$$d\tau^2/dt^2 = 1 - v^2/c^2$$

ali splošna oblika:

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{\frac{c^2 - v^2(t)}{c^2}} = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}.$$





Einsteinove enačbe polja dajo splošni (Keplerjev, oz. Newtonov) gravitacijski zakon v približku s šibkim poljem in počasnim gibanjem (gravitacijski zakon poznamo v obliki $F = GMm/r^2$, G je gravitacijska konstanta).

Naredimo majhen napor in poskusimo Einsteinove enačbe polja, saj v grobem, razumeti v simbolnem matematičnem zapisu za homogeno sferično (okroglo) telo. Zapišimo še enkrat Einsteinove enačbe polja in jih še nekoliko podrobneje razčlenimo.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

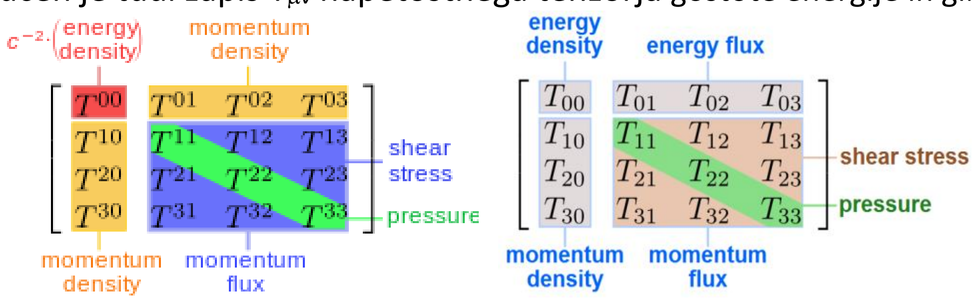
Če ponovimo - Einsteinove enačbe so tenzorske in enačijo ukrivljenost prostor-časa, izraženo preko Einsteinovega tenzorja, z energijo in gibalno količino, ki ju matematično določa, opiše napetostni tenzor. Tu je $R_{\mu\nu}$ Riccijev tenzor, R Riccijev skalar, $g_{\mu\nu}$ metrični tenzor in $T_{\mu\nu}$ napetostni tenzor (v vakuumu je nič). Riccijev tenzor ukrivljenosti prostora se zapiše s simboli Γ:

$$R_{ij} = R^k{}_{ikj} = \partial_l \Gamma^l_{ji} - \partial_j \Gamma^l_{li} + \Gamma^l_{l\lambda}\Gamma^\lambda_{ji} - \Gamma^l_{j\lambda}\Gamma^\lambda_{li}.$$

Ni odveč, da podamo še matematični zapis Christoffelovega simbola gama Γ:

$$\Gamma^l_{kj} = \frac{1}{2} g^{lm} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^m} \right)$$

Poučen je tudi zapis $T_{\mu\nu}$ napetostnega tenzorja gostote energije in gibalne količine:



Spodaj sta primera napetostnih tenzorjev za idealno tekočino, oz. tekočino v mirovanju :

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & \rho v_x & \rho v_y & \rho v_z \\ \rho v_x & p + \rho v_x^2 & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_y & \rho v_x v_y & p + \rho v_y^2 & \rho v_y v_z \\ \rho v_z & \rho v_x v_z & \rho v_y v_z & p + \rho v_z^2 \end{pmatrix} \quad (T^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=0,1,2,3} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

V polnem zapisu, učeno povedano, so Einsteinove enačbe polja sistem desetih sklopljenih, nelinearnih, hiperbolično-eliptičnih parcialnih diferencialnih enačb. Na enačbe se torej lahko gleda kot na množico enačb, ki narekujejo kako je ukrivljenost prostor-časa povezana s porazdelitvijo mase in energije v vesolju. Einsteinove enačbe polja dajo splošni gravitacijski zakon v približku s šibkim poljem in počasnim gibanjem (recimo F = GMm/r^2 ali ϕ = -GM/r).

Dve približni poti do razumevanja Einsteinovih enačb polja

Vsak koncept ima poleg miselnega vzorca svoj približek v osnovnih matematičnofizikalnih zapisih, enačbah. Kot smo že omenili, je pojem ukrivljenosti postal eden od temeljnih postulatov opisa vesolja, pojavov nasploh - razreši mnoge dileme, fenomene, recimo zakaj se pot svetlobe (ki nima mase) pod vplivom velike zvezdne mase ukrivi. Kot bomo videli, se je vse začelo že s tretjim Keplerjevim zakonom, ki se glasi: *"Kvadrat orbitalne periode planeta je sorazmeren kubu velike polosi elipse."* Pri kroženju (polmer r) okrog masnega središča pa velja zapis t^2/r^3 = konst. ali celo oblika, da je kvadrat kvocienta hitrosti in polmera (v^2/r^2) sorazmeren z gostoto objete mase (Hooke, Newton, Einstein so Keplerjeve zakone le nadgradili, a nadgradnja je zahtevala stoletja časa - člen $1/r^2$ je tukaj odločilen za novo mehaniko).

Prvi premislek, napor prvič

Newtonov gravitacijski zakon pravi (**F** = G**m1m2/r²**), da med masnima delcema deluje privlačna sila - ki je sorazmerna produktu mas **m1m2** in obratno sorazmerna kvadratu razdalje med delcema (**1/r²**). Sorazmernostni koeficient je gravitacijska konstanta G. Tukaj se pojavlja večna dilema, sploh v učbenikih, kaj narediti s fotoni, s svetlobo (elektromagnetnim valovanjem), ki nima mase, a kot vemo že vsaj 100 let - gravitacija očitno deluje tudi na svetlobo. IN - kako je vendar to mogoče, saj svetloba nima mase? Z Newtonovim zapisom fizike torej nekaj ne štima. Kot bomo (smo) videli, gravitacija vpliva tudi na merjenje časa. In ker Newton napačno predvideva, da sila teže deluje na razdaljo in to hipno - vemo pa, da nobena energijska sprememba (informacija) ne more potovati hitreje od svetlobe (c = 300000 km/s = $3*10^8$ m/s) - je Albert Einstein podal nov geometrijski opis prostora in časa v povezavi z gravitacijo in končno hitrostjo elektromagnetnega valovanja. Einsteinov premislek pravi, da masa in druge oblike energije krivijo prostor okrog sebe in s tem vplivajo na gibanje teles, na gibanje svetlobe, na dinamiko celotnega vesolja. In ker nobena zamisel ni nastala iz nič, poglejmo, kako bi lahko Newtonov zakon nadgradili, dopolnili, da bi se približali Einsteinovemu premisleku - recimo desnemu delu Einsteinove enačbe polja $\mathbf{8\pi GT/c^4}$. **T** je napetostni tenzor in prvi člen se nanaša na materijo gostote ρ in se zapiše kot produkt gostote in kvadrata svetlobne hitrosti $\mathbf{T_{oo}= \rho c^2}$. To je v bistvu gostota polne energije masnih delcev Too= E/V = $mc^2/V = \rho c^2$. Prvi desni člen tenzorja Einsteinove enačbe ima končno obliko $8\pi GToo/c^4 = 8\pi G\rho c^2/c^4 = 8\pi G\rho/c^2$.

Preko Newtonovega zakona bomo torej iskali ukrivljenost, ki vpliva recimo na gibanje svetlobe, na drugi strani pa naj ostanejo količine, ki ta prostor krivijo (masa, oziroma gostota snovi) in seveda naravne konstante (gravitacijska konstanta G, hitrost svetlobe c, ...).

Vprašajmo se ali svetloba (s hitrostjo c) lahko kroži okrog neke zelo masivne zvezde gostote ρ (mase M) na polmeru r. To se v resnici lahko zgodi in tak radij, polmer, kroženja fotona se izračuna preko enačbe $r = 3GM/c^2$ - ga bomo tudi pozneje izpeljali iz splošne teorije relativnosti - a za sedaj iščemo zgolj približek iz na novo interpretiranega Newtonovega zakona. Splošen izraz za centripetalni pospešek je v^2/r in le ta je enak Newtonovemu izrazu GM/r^2, saj velja, da je vir centripetalne sile v gravitaciji $mv^2/r = GmM/r^2$, maso m okrajšamo in ostane nam znana srednješolska enačba:

$\mathbf{v^2/r = GM/r^2}$

Maso M zapišimo z gostoto in volumnom krogle: $M = \rho V = \rho 4\pi r^3/3$. Ker pri visokih hitrostih velja teorija relativnosti, bomo med levim in desnim delom enačbe od zdaj naprej pisali zgolj znak za sorazmernost ($\propto$) in NE več enakosti. In ker meritve in tudi pričakovanja pravijo, da mora gravitacija delovati tudi na svetlobo, zapišemo namesto hitrosti **v** kar hitrost svetlobe **c**. Tako dobimo izraz:

$c^2/r \propto G\rho 4\pi r^3/(3r^2)$

- po krajšanju,

$c^2/r \propto G\rho 4\pi r/3$

- eno stran enačbe očistimo spremenljivke r, enačbo delimo z r in c^2, ter pomnožimo z 2, kaj dobimo?

$\mathbf{2/r^2 \propto G\rho 8\pi/(3c^2) \propto 8\pi G\rho c^2/c^4}$

Na LEVI strani enačbe je izraz za Gaussovo ukrivljenost sfere $\mathbf{K = 1/r^2}$ (v splošni teoriji relativnosti večinoma označujejo ukrivljenost s črko **R**, kar je malo zavajajoče, a se bomo že navadili; imenujemo jo **skalarna ukrivljenost** in je na ploskvi v dveh dimenzijah kar enaka dvakratni Gaussovi ukrivljenosti $\mathbf{R = 2(1/r_1)(1/r_2)}$, za sfero torej velja $\mathbf{R = 2K = 2/r^2}$).

Na desni pa nam je, če odmislimo določene številke, ostal izraz, ki skriva v sebi naravni konstanti (G in c) in **gostoto snovi**. V desnem izrazu se torej hkrati skriva tista masa ali zaloga energije, ki nam dopušča elegantno domislico, da namreč zaobjeta snov, oz. energija ($\mathbf{\rho c^2}$) ukrivljata prostor ($\mathbf{2/r^2}$).

Izraz $\mathbf{8\pi G\rho c^2/c^4 = 8\pi GT_{oo}/c^4}$ je dejansko tudi prvi (desni) člen Einsteinove tenzorske enačbe polja. Levi izraz $\mathbf{R = 2/r^2}$**,** pa predstavlja ukrivljenost prostora in tudi ta nastopa v levem delu Einsteinove enačbe in sicer kot Riccijev skalar (ne samostojno, ampak v kombinaciji z metričnim tenzorjem). Zapisa **Einsteinove enačbe polja** in nato našega izraza za sorazmernost, s katero smo iskali **povezavo med ukrivljenostjo sfere (prostora) glede na zaobjeto maso**, sta si izjemno podobna - glej primerjalna zapisa, ki sledita.

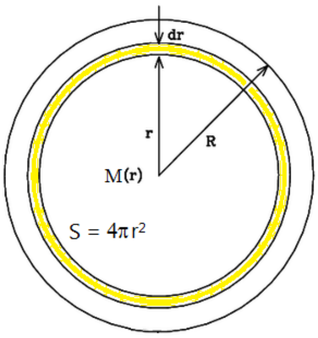
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$\mathbf{R = 2/r^2 \propto 8\pi GT_{oo}/c^4}$$

Matematično, glede na izpeljavo, zapisa nista enakovredna (bomo videli zakaj ne, delno smo že omenili razlike), a v razmisleku (fenomenološko) sta praktično enakovredna.

Torej preko grobega sklepanja o geometriji prostora, ki ga določa masa, energija, smo prišli blizu fenomena, ki ga opisujejo Einsteinove enačbe polja - delno tudi formalno matematično, kar je izjemnega pomena za demistifikacijo določenih pojmov, enačb. Če boste poiskali enote leve in desne strani členov enačbe, boste na koncu po krajšanju dobili enoto $[1/m^2]$. Na levi se seveda takoj vidi $(2/r^2)$, da je enota $[1/m^2 = m^{-2}]$.
Že pri enotah takoj opazimo ogromno razliko duha enačb, če smo pri Newtonu iskali sile med delci [enota Newton N], pri Einsteinu iščemo ukrivljenost prostora $[m^{-2}]$, ki je ob sferičnem telesu (zvezdi, planetu) enaka $2/r^2$. Zakaj - ker ukrivljenost prostora bolj celovito, z manj dilem, opiše dogajanje v vesolju.

Drugi premislek, napor drugič
Še pred "naporom II" približnega razumevanja Einsteinovih enačb polja, preko skice zapišimo Gaussov gravitacijski zakon. Za površino ploskve bomo uporabili splošno uveljavljen simbol A (iz angleške besede *Area*).



$$\oint_{\partial V} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -4\pi GM.$$

Gaussov gravitacijski zakon obravnava težo preko gravitacijskega polja, kot posledico mase in sam integral pospeška po celotni zaključni površini 'A' je sorazmeren zaobjeti masi: $(4\pi r^2 GM/r^2 \propto \mathbf{M})$
Ker Einstein trdi, da masa, oz. energija krivita prostor-čas, poiščimo tako povezavo med gibanjem v prostoru (po starem v gravitaciji), ki bo na eni strani enačbe opisovala dinamiko nekega gibanja (dinamiko telesa z maso m ali fotona) – na drugi strani enačbe pa naj bo zbrana vsa masa in energija prostora (izražena je lahko preko gostote mase pomnožene s hitrostjo svetlobe na kvadrat in gostote vseh energij, recimo sevanja, itn). Tokrat se bomo, kot smo že omenili, omejili zgolj na homogeno sferično (okroglo) telo, kar je zelo dober približek zvezd in planetov.
Pomagajmo si z gravitacijskim potencialom $\phi = -GM/r$ in z že zgoraj zapisano Schwarzschildovo metriko, izpeljavo katere smo, delno preko hevrističnega pristopa, tudi že nakazali. Sedaj si bomo pomagali zgolj s prvim členom metričnega tenzorja, ki ga bomo zapisali s potencialom: $\mathbf{g_{00} = -(1\text{-}2GM/(c^2r)) = -(1+2\phi/c^2)}$. Gravitacijski potencial za sferično telo z maso M je, kot smo že zapisali, kar $\boldsymbol{\phi = -GM/r}$. Ker velja, da je sila na telo z maso m kar sorazmerna odvodu, gradientu potenciala ϕ, to zapišemo kot: $F = \mathbf{md^2r/dt^2 = md\phi/dr} =$

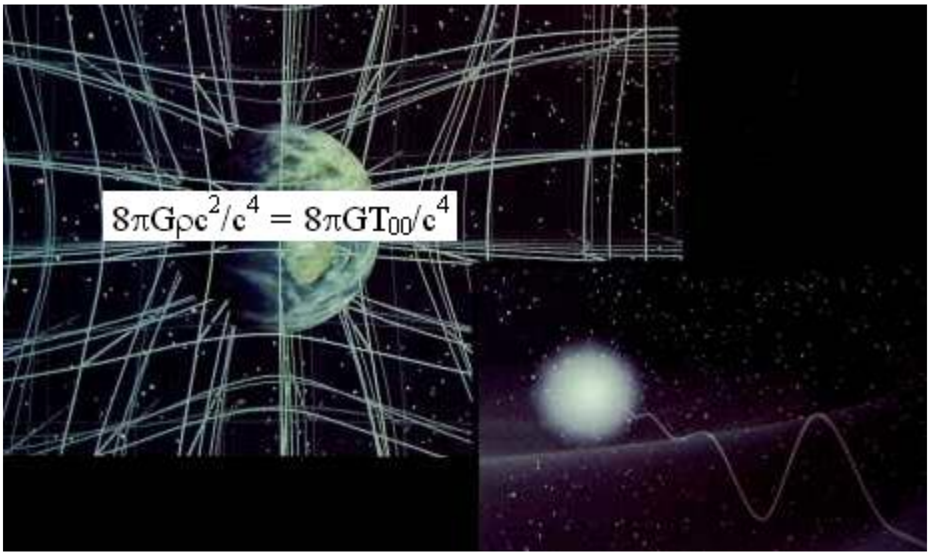
GMm/r^2. Gradient je tukaj mišljen zgolj v radialni smeri, saj se pri sferičnem homogenem telesu gravitacija ne spreminja po poti loka okrog telesa. Odvod (gradient) potenciala je po definiciji kar pospešek $g = -d\phi/dr = -GM/r^2$. V prostoru, v vesolju, nas recimo zanima, kako se na neki ukrivljeni ploskvi spreminja pospešek, oziroma sila na neko telo. Ploskovni prispevek lupine k pospešku na razdalji r od centra sferičnega telesa lahko zapišemo preko diferenciala dM mase lupine, ki jo izrazimo z gostoto in diferencialom volumna (slika iz začetka poglavja: $dM = \rho dV = \rho Sdr = \rho 4\pi r^2 dr$, kjer je $S=4\pi r^2$ kar površina lupine - krogle na razdalji r); velja $dg = -GdM/r^2 = -G\rho 4\pi r^2 dr/r^2 = -G\rho 4\pi dr$. Iz česar sledi, da je odvod (gradient) pospeška kar $dg/dr = -G\rho 4\pi$, oziroma drugi odvod potenciala po r je $\mathbf{d^2\phi/dr^2 = 4\pi G\rho}$. Namesto d/dr bi morali pisati parcialne odvode $\partial/\partial x+\partial/\partial y$ ... (uporabimo standardni simbol za gradient $\nabla = \partial/\partial r$), oz. drugi odvod s simbolom $\partial^2/\partial r^2$, kar zapišimo z znakom ∇^2 (to je Laplaceov operator). Tako smo prišli do Poissonove enačbe $\mathbf{\nabla^2\phi = 4\pi G\rho}$ **(**dejansko smo čez palec uporabili tudi Gaussov zakon**)**. **Sedaj smo pa že delno izpolnili naš zastavljeni cilj – na desni strani enačbe je ostala zgolj gostota telesa pomnožena s konstantama 4π in G, na levi pa dvojni gradient potenciala, ki določa dinamiko teles v prostoru.** Če ponovimo - člen g_{00} v metričnem tenzorju zgoraj zapisane Schwarzschildove metrike je $\mathbf{g_{00} = (1-2GM/(c^2r))}$**,** kar je enako $g_{00} = (1+2\phi/c^2)$, saj je $\phi = -GM/r$. Prvi člen metričnega tenzorja $\mathbf{g_{00}}$ je torej sorazmeren z $\mathbf{2\phi/c^2}$. Od koder sledi $\partial^2 g_{00}/\partial r^2 = 8\pi G\rho/c^2 = 8\pi G\rho c^2/c^4 = 8\pi GT_{00}/c^4$. Tukaj smo uporabili kar Einsteinovo enačbo $E = mc^2$ ali $T_{00} = E/V = mc^2/V = \rho c^2$, za gostoto energije prvega člena napetostnega tenzorja: $T_{00} = \rho c^2$. Tako pridemo do enačbe:

$$\mathbf{\nabla^2 g_{00} = 8\pi GT_{00}/c^4}.$$

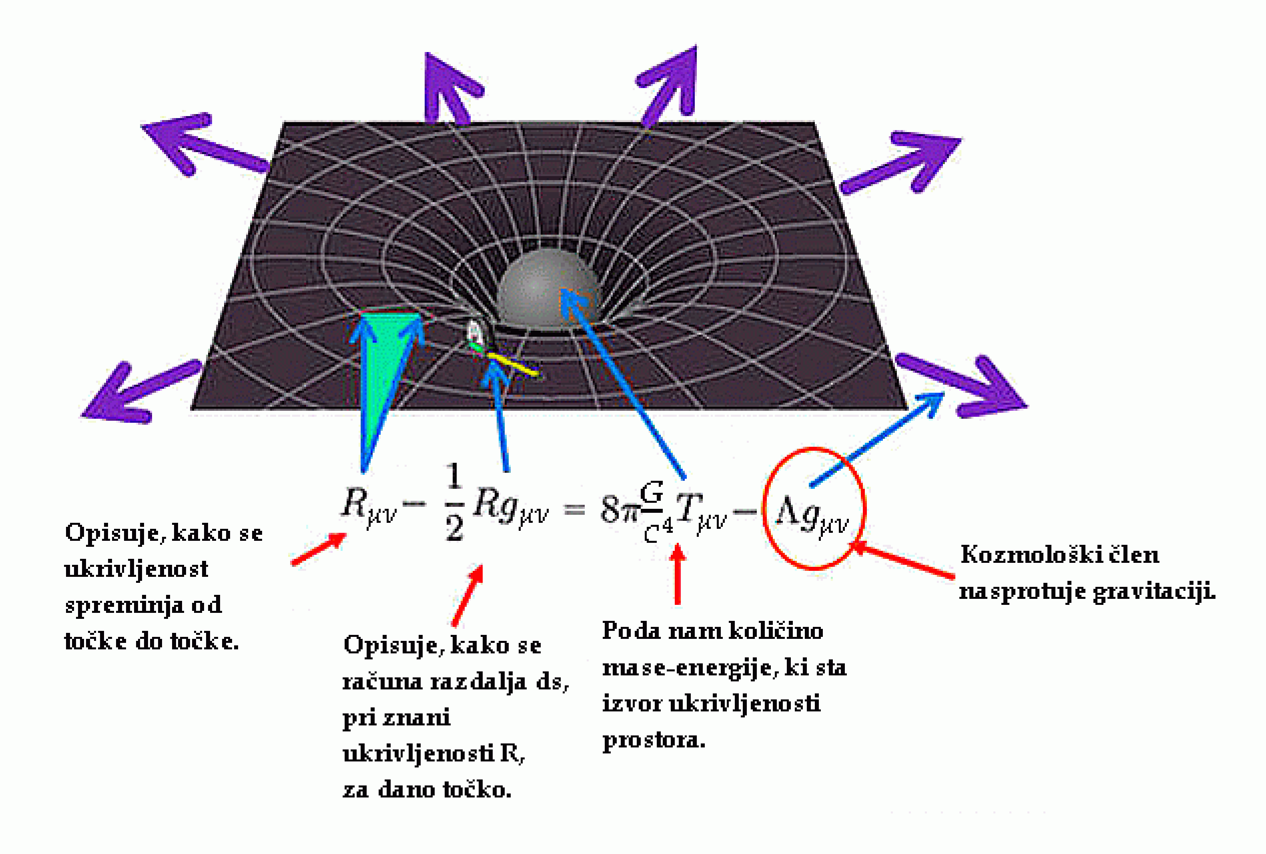
Ta enačba (to je zgolj prvi člen tenzorja) je že zelo podobna prvotni Einsteinovi enačbi (enačbam) polja v tenzorski obliki ($\mathbf{G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}/c^4}$), oziroma današnjemu zapisu:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\, R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

Še enkrat, to je bila - tako čez palec – zgolj matematičnofizikalna telovadba, ki nam je vsaj v grobem majceno približala duha Einsteinovih enačb polja (**ukrivljenost prostora določa masa, energija**), zgolj na primeru sferičnega telesa z maso M, ki ima gostoto energije $E/V = Mc^2/V = \rho c^2$.



Priložena slika kaže prispodobo ukrivljenosti prostora zaradi mase Zemlje (desni spodnji kot pa prikazuje nekoliko pretirano ukrivljeno pot žarkov iz oddaljene zvezde po ukrivljenem prostor-času) – to je bistvo naše preproste poti do vsaj približnega razumevanja prvega člena Einsteinovega tenzorskega zapisa s predpostavko, da ni razlike med maso in energijo, in da vsaki energiji lahko pripišemo ekvivalent mase in obratno. In Einstein je prav to zapisal v svojih enačbah polja, kjer pravi, da vsa masa in energija nekega prostora ta prostor ukrivlja in določa gibanje po tem prostoru. Določa dinamiko tako masnih delcev in seveda tudi fotonov (recimo odmik žarkov od smeri v bližini zvezd). V Newtonovi sliki sveta gibanje določa sila gravitacije kot posledica mase in v njej je čas absoluten, kar pa je pomanjkljivo. Na gibanje (dinamiko) namreč vpliva vsa energija nekega prostor-časa, ki ukrivlja prostor – in s tem smo razrešili mnoge dileme, recimo kako lahko gravitacija vpliva na svetlobo – in tudi čas ni več absoluten.



Slika - nazoren prikaz členov Einsteinovih enačb polja.

V praznem prostoru, ki je raven, je Riccijev tenzor $\boldsymbol{R_{\mu\nu}} = 0$, enako velja za Riccijev skalar ***R***, metrični tenzor $\boldsymbol{g_{\mu\nu}}$ pa ima v tem primeru v prvem členu vrednost $\boldsymbol{g_{oo}} = 1$ (napetostni tenzor pa ima v prvem členu vrednost ***Too*** = ρc^2) in ostaneta nam zgolj enačbi:

$$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{vac})} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\mu\nu}$$

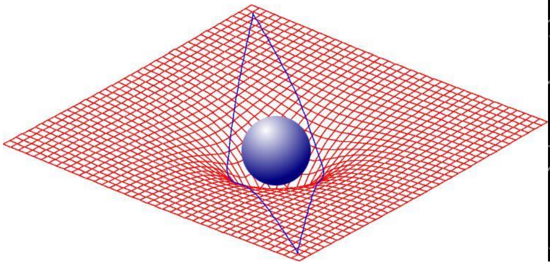
$$\rho_{\mathrm{vac}} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

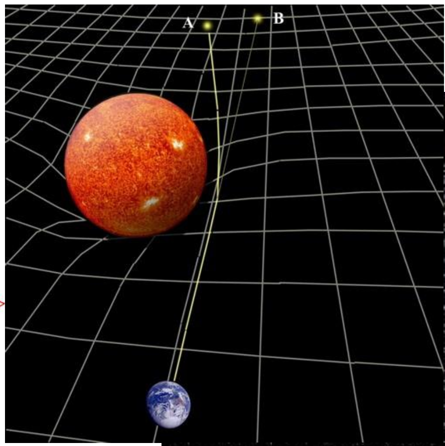
Zadnja enačba predstavlja tako imenovano gostoto vakuuma (naj se sliši še tako čudno, a v vakuumu se stalno dogajajo fluktuacije, pari delec-antidelec, ...) in je to hkrati matematični zapis, poleg Heisenbergovega načela nedoločenosti [$\Delta E \Delta t \geq h/(4\pi)$], v katerem se skriva možna razlaga začetka vesolja: pospešeno širjenje prostor-časa.

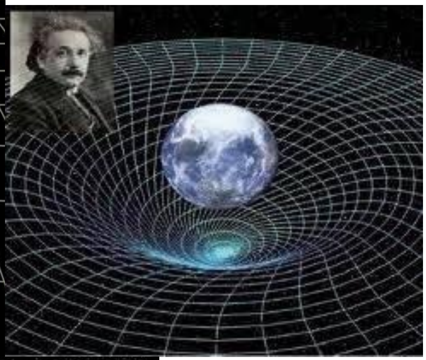
Še zgodba o kozmološki konstanti ***Λ***

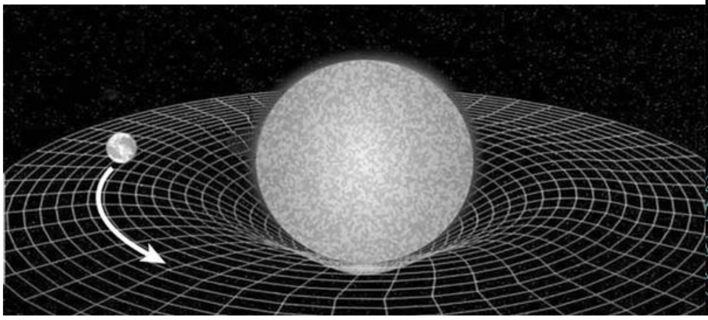
Člen s kozmološko konstanto je izvirno vpeljal Einstein leta 1917, da bi omogočal takšno rešitev enačb polja, ki bi podprla model statičnega nerazširjajočega se Vesolja. Ta poskus uvedbe konstante se je pokazal za neuspešnega. Statično Vesolje je bilo po teoriji nestabilno in 1927 je Georges Lemaître objavil članek ("A homogeneous Universe of constant mass and growing radius accounting for the radial velocity of extragalactic nebulae" - "Homogeno vesolje konstantne mase in naraščajočega polmera izračunanega iz radialne hitrosti izvengalaktičnih meglic"), enako je Hubble po desetletju opazovanj leta 1929 odkril oddaljevanje galaksij, kar je kazalo na širjenje Vesolja. Einstein je člen ***Λ*** opustil in imenoval svojo vpeljavo »za svojo največjo zablodo v življenju«. Dolgo časa so menili, da je vrednost kozmološke konstante enaka 0. Novejša izboljšana astronomska opazovanja so odkrila, preko sija supernov tipa Ia, da rezultate lahko pojasni le od 0 različna kozmološka konstanta ***Λ***, saj se vesolje pospešeno širi.

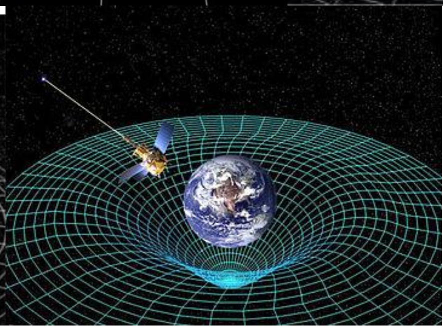
*











Schwarzschildova metrika sfere (recimo neke zvezde) in njene »posledice«

Še enkrat se vprašajmo, kaj se zgodi, če se nek sistem giblje v polju teže – gravitacije (pravimo tudi, da se giblje po »svetovnici«) - s pospeškom (g – ki ga določa gravitacija telesa M na razdalji r) v prostor-času v smeri r' (ki je lahko tudi x', če nam je ta simbol bližje). Kako se spreminja metrika v prostor-času *dS,*^{2} z upoštevanjem gravitacije, smo pravkar izpeljali:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Poglejmo recimo, kaj pomeni ta metrika za merjenje časa. Predpostavimo, da je prvi opazovalec zelo daleč od nebesnega objekta, tako da v bistvu ne čuti gravitacije. Zanj torej velja, da vidi nek dogodek v metriki $ds^2 = -c^2dt^2(1 - 2GM/(c^2r)) + dr^2/(1 - 2GM/(c^2r)) + r^2d\Omega^2$. Za opazovalca na razdalji r od nebesnega telesa pa velja metrika $ds'^2 = -c^2dt'^2$ (saj leži na »svetovnici«). To hkrati pomeni, da se opazovalec giblje po »svetovnici« s pospeškom g (ki ga določa nebesno telo) in zato ne čuti gravitacije (še enkrat bomo ponovili, to je Einsteinov premislek, njegova najsrečnejša misel). To je, še enkrat ponovimo, podoben primer kot pri odbitem žarku v vozilu, ki za opazovalca prileti nazaj v izhodišče (naš prvi primer iz posebne teorije relativnosti). Izenačimo metriki in izrazimo čas dt', kaj dobimo:

$-c^2dt'^2 = -c^2dt^2(1 - 2GM/(c^2r)) + dr^2/(1 - 2GM/(c^2r)) + r^2d\Omega^2$

$dt'^2 = dt^2((1 - 2GM/(c^2r) - (dr^2/dt^2/c^2)/(1 - 2GM/(c^2r)) - (r^2/c^2)d\Omega^2/dt^2)$

$dt'^2 = dt^2((1 - 2GM/(c^2r) - (v_r^2/c^2)/(1 - 2GM/(c^2r)) – v_t^2/c^2)$

Kot pomoč pri opisu smo vpeljali dve znani hitrosti v_r in v_t.

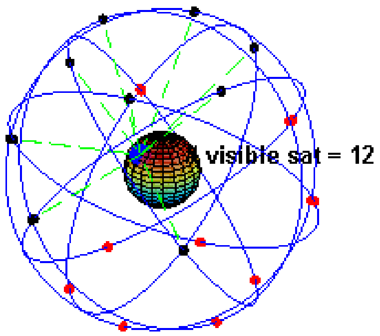
$v_r = dr/dt$ – radialna hitrost
$v_t = rd\Omega/dt = r\omega$ - je tangentna (obodna) hitrost, recimo kroženja satelita

Če sta obe hitrosti enaki nič ($v_r = 0$ in $v_t = 0$), velja med neskončnostjo (kjer ni gravitacije, $1/r_\infty = 0$) in časom t, ter časom t', ki teče v gravitacijskem polju, povezava:
$dt'^2 = dt^2(1 - 2GM/(c^2r))$
$$\mathbf{dt = dt'/(1 - 2GM/(c^2r))^{1/2}}$$

Za satelit, ki kroži ($v_t = rd\Omega/dt = r\omega$) pa velja dopolnjena enačba:
$$\mathbf{dt = dt'/(1 - 2GM/(c^2r) - v_t{}^2/c^2)^{1/2}}$$

Navigacijski sistem satelitov GPS in relativnost

Vprašajmo se, kolikšna je razlika v času med urami na Zemlji in recimo na GPS satelitih? Kaj je lahko posledica, če to razliko zanemarimo? Čas je namreč pomemben dejavnik pri pravilnem določanju položaja sprejemnika na Zemlji! Med satelitom in sprejemnikom namreč teče komunikacija, in če ne upoštevamo časovne razlike (relativnostnih enačb), pride do napak v oceni koordinat na Zemlji. Ponovimo torej izračun iz začetka teksta – res ne bo odveč.



Naj bo $M = 5.9742*10^{24}$ kg masa Zemlje, R razdalja od središča Zemlje do satelita Rs = 26600000 m ali do opazovalca na Zemlji Rz = 6400000 m, G gravitacijska konstanta ($G = 6.6726*10^{-11}\ m^3s^{-2}kg^{-1}$), c je hitrost svetlobe ($c = 299792458*10^8$ m/s). Hitrost satelita je $v_{ts} = (G*M/Rs)^{1/2} = 3.869$ km/s = 3869 m/s. Hitrost vrtenja Zemlje na ekvatorju je $v_{tz} = 463.312$ m/s. Za dt_z' vzamimo kar en dan: $dt_z' = 24*3600$ s = 86400 s. Za tek časa na Zemlji in satelitih velja najprej zapisati razmerje obeh metrik, časov:
$dt/dt = 1 = dt_z'/(1 - 2GM/(c^2Rz) - v_{tz}{}^2/c^2)^{1/2} / dt_s'/(1 - 2GM/(c^2Rs) - v_{ts}{}^2/c^2)^{1/2}$
$$\mathbf{dt_s'/dt_z' = (1 - 2GM/(c^2Rs) - v_{ts}{}^2/c^2)^{1/2}/(1 - 2GM/(c^2Rz) - v_{tz}{}^2/c^2)^{1/2}}$$
$k = dt_s'/dt_z' = 1.000000000447367$
Razmerje med časoma satelit - Zemlja $k = dt_s'/dt_z'$ je sicer šele na deseti decimalki različno od nič, a kot bomo videli, ker gre za pošiljanje signalov s hitrostjo svetlobe, nanese neupoštevanje te razlike že v enem dnevu napako lege okrog 10 km. Razlika med časoma v enem dnevu se zdi zelo majhna, le $3.86525*10^{-5}$ s:

t'_razlika = $dt_s' - dt_z' = kdt_z' - dt_z' = dt_z' (k - 1)$ = 86400 s (1.000000000447367 – 1) = 3.86525*10^{-5} s

Napaka pozicije na dan pa je kar $c*(dt_s' - dt_z')$ = 11595.75264 m = 11.6 km.

Inženirji pri GPS, ki so bili slabo podkovani, niso verjeli v relativistično odstopanje časa. Tako da med prvimi preizkusi, ko so utirili prvo cezijevo uro, niso vključili mehanizma za usklajevanje časov. A zelo hitro so spoznali, da ima Einstein prav. Brez tega relativističnega popravka bi sistem GPS prekoračil sprejemljivo mejo napak v manj kot dveh minutah. Tudi atmosfera veliko prispeva k nenatančnosti GPS sistema, pa še kaj.

Še izračun s kombinacijo splošne in posebne relativnosti. Za gibanje (kroženje) satelita lahko uporabimo posebno relativnost (razlika v času je $t_{sv}' = t(1 - v_{ts}{}^2/c^2)^{½}$), z upoštevanjem različne višine pa pride v poštev razlika v času zaradi vpliva gravitacije (**$t_{sg}' = t(1 - 2GM/(c^2R))^{½}$** - njen prispevek je celo večji in nasproten**)**. To poenostavitev pa lahko uporabimo zato, ker je gravitacijsko polje Zemlje relativno majhno. Če oboje preračunamo in upoštevamo razliko, ter še vrtenje Zemlje (v_{tz} = 463.312 m/s.), dobimo praktično enak rezultat potencialne GPS napake v dnevni legi koordinate na Zemlji, to je 11.6 km, kot pri upoštevanju Schwarzschildove metrike. Zakaj? Če upoštevate poenostavitve za majhne x-se in $x = 2GM/(c^2R)$ je zagotovo zelo majhna količina, velja $1/(1-x) \approx 1 + x$ ali $(1 - x)^{1/2} \approx 1 - x/2$, lahko tudi formalno matematično dokažete, da oba pristopa vrneta, v okviru natančnosti meritev, enaka rezultata. Približek je:

$dt_s'/dt_z' = 1 - 3GM/(2c^2Rs) + GM/(c^2Rz) + v_{tz}{}^2/(2c^2)$

In to si velja zapolniti za naprej, večino računov v Sončevem sistemu se da opraviti s kombinacijo posebne in splošne teorije relativnosti (ki pride v poštev le ob izraziti spremembi oddaljenosti od centralne mase - od Zemlje ali od Sonca). Tudi vsakdanje življenje nam to resnico potrjuje, saj se nam zdi prostor raven (pot žarkov prema – v resnici pa pot žarkov ni prema, je kriva, a natančnost naših čutov je tako groba, da tega ne nikakor moremo zaznati). Misel iz začetke, da bomo razširili Pitagorov izrek še z dimenzijo časa (ct) je torej dokaj pravilna, saj drugače matematika (geometrija, Pitagorov izrek) v ravnini nikoli ne bi zaživela. Lahko si recimo predstavljamo, da bi kot super odporna bitja, živeli blizu črne luknje – tam bi dejansko zaznali, da je čas-prostor ukrivljen – o geometriji na ravnini bi lahko samo sanjali (občutek bi bil približno tak, ko če bi na Zemlji ne imeli listov za pisanje, ampak le okrogle žoge, raztegnjene balone, ... – klasični evklidski Pitagorov izrek bi bilo tako nemogoče grafično prikazati). Evklidska geometrija nam je torej v bistvu bolj domača, kot sama zgodba z ukrivljenim prostor-časom. Zato se ni čuditi, da je recimo rusko-poljski matematik Lobačevski bil leta 1846 krivično degradiran, ker si je drznil nekaj let pred tem vpeljati neevklidsko geometrijo. V geometriji Lobačevskega je recimo vsota notranjih kotov trikotnika manjša od dveh pravih kotov. Čeprav je bila njegova geometrija za tiste čase

neobičajna, v njej ni (bilo) mogoče najti nobenih logičnih protislovij – težave je imel le zaradi predsodkov (izstopal je od vsakdanje izkušnje).
No – tudi posebne relativnosti ne bi bilo moč dokazati, če bi bila gravitacija Zemlje premočna. Če na pravkar obdelanih primerih povzamemo dosedanjo sliko mehanike, bi lahko zapisali naslednje trditve:

- Newtonova mehanika velja za počasna telesa (napram hitrosti svetlobe),

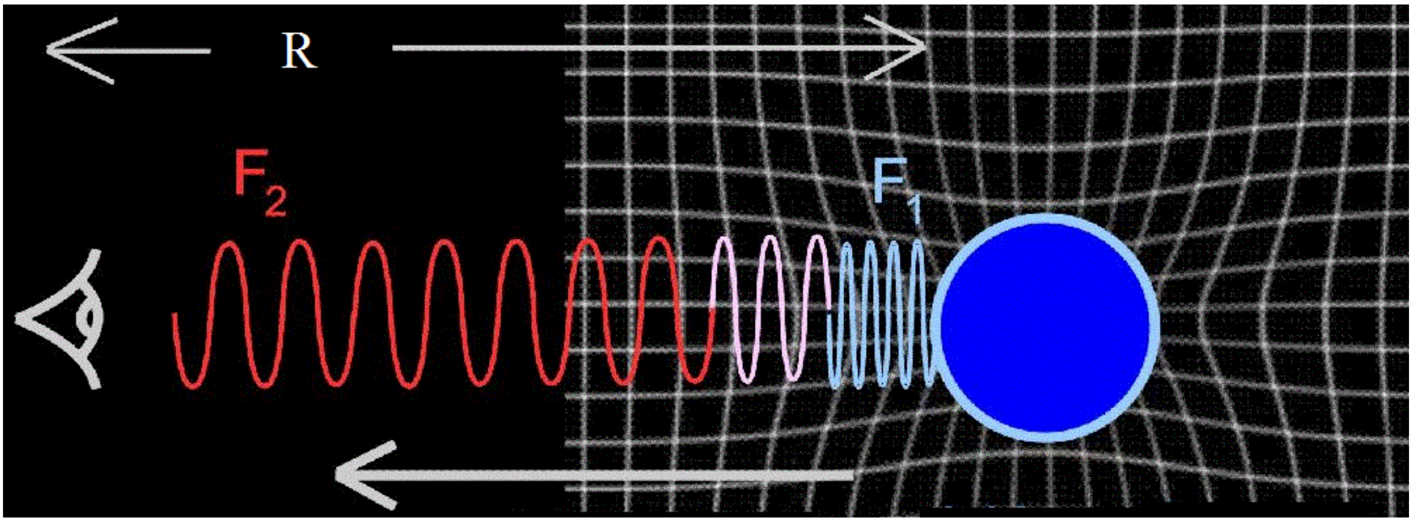
- posebna relativnost nadgradi Newtonovo mehaniko za hitra telesa v šibkem gravitacijskem polju (premiki glede na spremembo gravitacije naj bodo minimalni, vsaj znotraj natančnosti meritev),

- splošna relativnost pa poleg hitrosti teles upošteva še vpliv teles (gravitacije) na ukrivljenost prostor-časa.

Pri satelitih se zdijo hitrosti sicer majhne v primerjavi s svetlobno, a vendar, skupaj s kombinacijo spremembe gravitacije (ϕ = -GM/R), dajo efekt, ki ga je pri natančnem odčitavanju časa nujno potrebno upoštevati. Integracija časovne razlike lahko namreč pripelje do velikega kaosa v satelitski navigaciji – seveda se to ne zgodi, ker upoštevamo tudi korekcijo zaradi učinkov splošne relativnosti.

Poglejmo gravitacijski rdeči premik

Gravitacijski rdeči premik je posledica izgube energije fotonov, ko svetloba zapušča gravitacijsko polje nekega masivnega telesa. Na sliki je masivno telo predstavljeno z modro barvo, frekvenca blizu telesa je simbolično označena z F1, daleč vstran pa z F2. Foton (delec svetlobe), ki se oddaljuje od (recimo) zvezde, izgublja energijo (Ef = hν = h/λ) in se mu zato valovna dolžina veča – tozadevno se ta pojav imenuje gravitacijski rdeči premik.



Zanima nas, ali nas Schwarzschildova metrika pripelje tudi do zveze med valovno dolžino in gravitacijo.

$dt'^2 = dt^2((1 - 2GM/(c^2r) - (v_r^2/c^2)/(1 - 2GM/(c^2r)) – v_t^2/c^2)$

Privzeli bomo samo tisti del enačbe za čas, ki ostane, ko sta hitrosti enaki nič (v_r = 0 in v_t = 0). Preostali del enačbe (časovni) se na koncu zapiše: $dt = dt'/(1 - 2GM/(c^2r))^{1/2}$, oziroma $\Delta t = \Delta t'/(1 - 2GM/(c^2r))^{1/2}$.

Frekvenca $\nu_1 = 1/\Delta t'_1$ in $\nu_2 = 1/\Delta t'_2$. Merimo torej čas prehoda valovne dolžine, obratna vrednost tega časa pa je kar frekvenca.

Valovna dolžina pri zvezdi naj bo $\lambda_1 = c\Delta t'_1$, na večji razdalji pa $\lambda_2 = \Delta dt'_2$. Če delimo valovni dolžini, velja:

$$\boldsymbol{\lambda_2/ \lambda_1 = \Delta t'_2/ \Delta t'_1 = (1 - 2GM/(c^2r_2))^{1/2}/(1 - 2GM/(c^2r_1))^{1/2}}$$

Če je razdalja r_2 zelo velika, gre člen $(1 - 2GM/(c^2r_2))^{1/2}$ proti 1, potem velja:

$$\boldsymbol{\lambda_2/ \lambda_1 = 1/(1 - 2GM/(c^2r_1))^{1/2}}$$

Rdeči premik je v splošnem definiran kot **$z = (\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1 = \lambda_2/ \lambda_1 - 1$. To je razmerje med spremembo valovne dolžine glede na osnovno valovno dolžino ($z = \Delta\lambda/\lambda$). V** izraz **$z = \lambda_2/ \lambda_1 - 1$** vstavimo Schwarzschildov člen in dobimo končni rezultat spremembe valovne dolžine svetlobe zaradi gravitacije za velike razdalje od masivnih teles:

$$\boldsymbol{Z + 1 = 1/(1 - 2GM/(c^2r_1))^{1/2}}$$

Če gledamo bližnji efekt (ko se foton ne oddalji bistveno od zvezde ali galaksije) velja zveza:

$$\boldsymbol{Z + 1 = (1 - 2GM/(c^2r_2))^{1/2}/(1 - 2GM/(c^2r_1))^{1/2}}$$

Še beseda o besedni zvezi teorija relativnost. Danes zagotovo vemo, da to ni zgolj teorija, ampak je to kar »zakon relativnosti«.

Kot imamo Newtonove zakone, ki pa so s stališča današnjega vedenja bolj teorija (približek za majhne hitrosti, katere so nam ljudem seveda blizu), bi bilo torej bolje zadevo obrniti in reči, da poznamo »Newtonovo teorijo« in »zakone relativnosti«.

Iz podatkov o Soncu izračunajmo rdeči premik za žarek valovne dolžine 500 nm, ki zapusti Sonce in ga zaznamo na Zemlji. Podatki o Soncu so:

$R = 6.955\cdot10^{8}$ m (polmer Sonca)

$M = 1.989\cdot10^{30}$ kg (masa Sonca)

$r = 1.4960\cdot10^{11}$ m (razdalja Zemlja - Sonce)

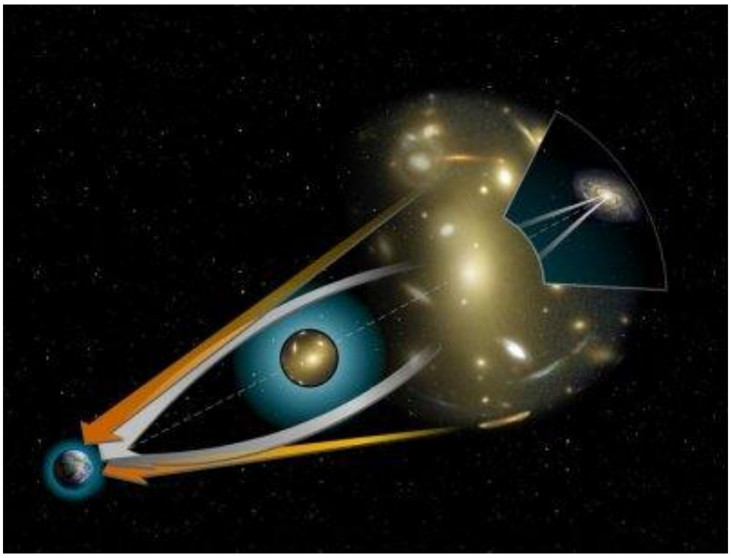
$G = 6.6742\cdot10^{-11}$ Nm²/kg²

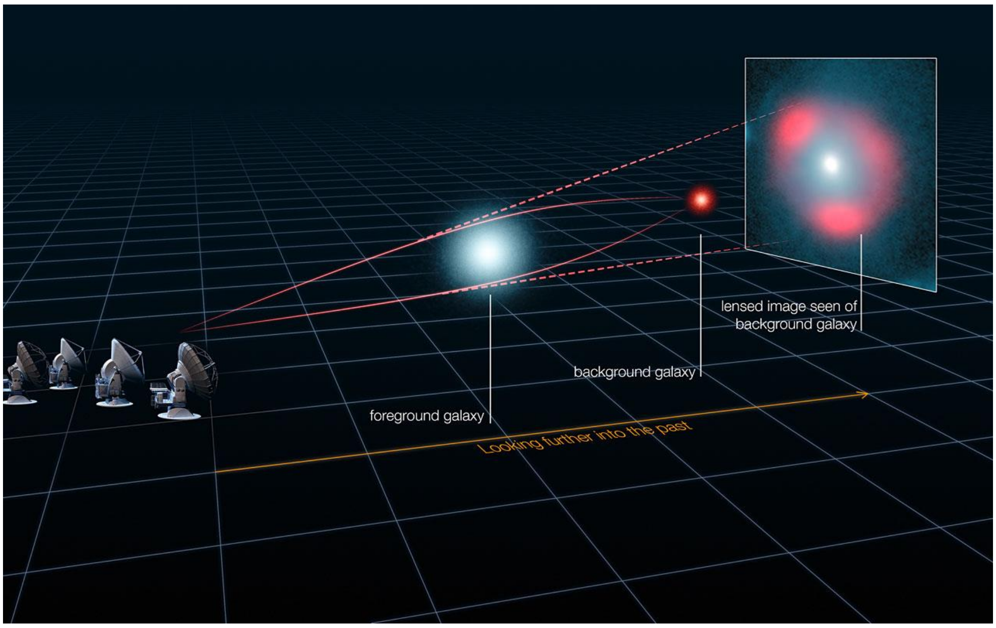
Enačbo za rdeči premik poenostavimo, saj so členi $2GM/(c^2r)$ zelo majhni in zato uporabimo naslednje izraze: $1/(1-x) \approx 1 + x$ in $(1 - x)^{1/2} \approx 1 - x/2$.

$Z + 1 = (1 - 2GM/(c^2r))^{1/2}/(1 - 2GM/(c^2R))^{1/2}$
$Z = GM/(c^2R) - GM/(c^2r) = (GM/c^2)(1/R – 1/r) = 2.12\cdot 10^{-6}$
$\Delta\lambda = z\cdot\lambda = 2.12\cdot 10^{-6}\cdot 500\cdot 10^{-9}$ m $= 1.06\cdot 10^{-12}$ m = 0.00106 nanometrov (nm)
To je relativno skromen rdeči premik, razlika med urami v enem letu pa bi znesla že okrog minute (zgolj zaradi gravitacije).

Za povprečno nevtronsko zvezdo pa je rdeči premik (podaljšanje valovne dolžine) že kar opazen. Podatki za klasično nevtronsko zvezdo so:
$Rn = 10^4$ m
$Mn = 3\cdot 10^{30}$ kg
$r = 1.4960\cdot 10^{11}$ m (hipotetična razdalja Zemlja – nevtronska zvezda)
Sedaj je potrebno uporabiti korektno enačbo: $Z + 1 = (1 - 2GMn/(c^2r))^{1/2}/(1 - 2GMn/(c^2Rn))^{1/2}$
$z = 0.343$
$\Delta\lambda = z\cdot\lambda = 1.71\ 10^{-7}$ m = 171 nm
Taki rdeči premiki se dejansko izmerijo.
Zakasnitev v času v enem letu pa bi bila na nevtronski zvezdi že nekaj mesecev.

Ukrivitev svetlobe v polju gravitacije, gravitacijsko lečenje

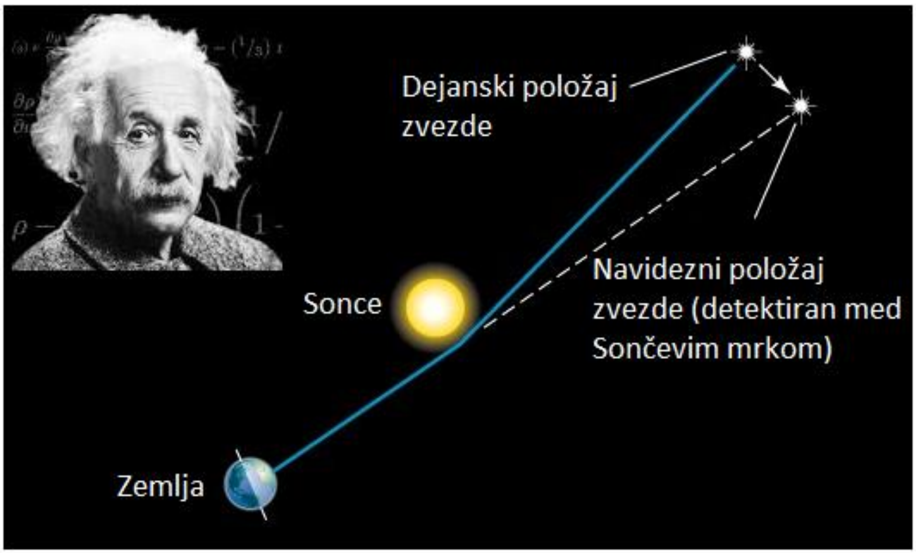




O odklonu svetlobnih žarkov v gravitacijskem polju so razmišljali že mnogi pred Einsteinom – Newton, Laplace. Cavendish z uporabo gravitacijskega zakona izračuna velikost odklona, a svojih rezultatov ni objavil. Prvi izračun odklona žarka v gravitacijskem polju Sonca leta 1804 objavi nemški fizik in astronom Johhan Soldner. Alebert Einstein (1911) z uporabo načela ekvivalence pride do enakega rezultata. Leta 1915 pa preko matematičnega zapisa enačb splošne teorije relativnosti oceno dvakrat poveča. Einstein tokrat napove odklon žarkov za 1.7", če ti potujejo tik ob površju Sonca. Ta rezultat je 29. maja 1919 potrdil Arthur Eddington – vodil je eno od ekspedicij, ki je tudi eksperimentalno potrdila spremembe lege Soncu navidezno bližnjih zvezd med Sončevim mrkom.

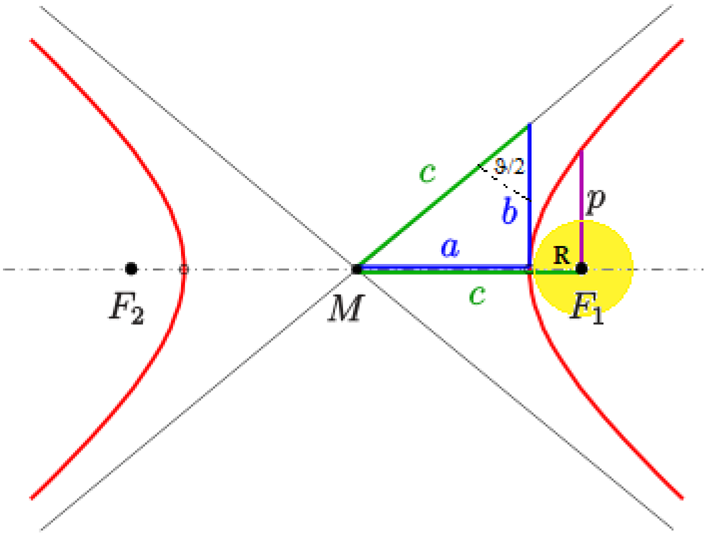
Poglejmo si napačen in pravilen izračun odklona žarka ob zvezdi

*** Eno ključnih potrditev splošne teorije relativnosti je omogočil Sončev mrk 1919**



Slika: Kot odklona žarka iz prvotne smeri tik ob Soncu je po Einsteinu: α = 4GM/(c^2R) = 1,75 '' (če bo »slučajno« kdo od bralcev računal odmik, je rezultat potrebno iz radianov spremeniti v ločne sekunde: M = 1,99*10^{30} kg je masa Sonca, R = 695700000 m polmer Sonca, c = 299792458 m/s = 3*10^8 m/s hitrost svetlobe, G=6,67408*10^{-11} $m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$ gravitacijska konstanta). Izvor razmerij med količinami v formuli se da celo v srednji šoli do neke mere pojasniti, a samo do polovice Einsteinovega rezultata, preko poti fotona po hiperboli mimo Sonca. Nekaj podobnega, napako polovične vrednosti, je Einstein naredil leta 1911 in že drugi pred njim (Soldner), a je enačbo, preko splošne teorije relativnosti, korigiral leta 1915.

Napačna pot do izračuna odklona žarka preko klasične mehanike



Slika: Hiperbola (rdeči krivulji na grafu) je lahko pot delca, telesa z maso (m) - recimo kometa - v gravitacijskem polju masivnega sfernega lupinasto homogenega objekta – recimo zvezde z maso (M). Pogoj je, <u>da ima delec skupno energijo večjo od nič.</u> Zapišimo energijo delca z maso m in hitrostjo v, ko sta središči teles oddaljeni za (r) – vsota kinetične in potencialne energije je: E = Ek + Ep = $mv^2/2$ – GmM/r. Enačba hiperbole je: x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 (a in b sta polosi). Enačbo lahko tudi zapišemo kot: y=±(b/a)$(x^2 - a^2)^{1/2}$. Enačba asimptot hiperbole je: y=±bx/a (to sta premici, ki se sekata med temenoma in se pri veliki vrednosti spremenljivke x zelo približata krivulji hiperbole). Iz slike lahko razberemo, da je zvezda v gorišču hiperbole, da je razdalja od središča zvezde do temena hiperbole enaka c-a. Za c velja: c = $(a^2 + b^2)^{1/2}$. Razdalja od središča zvezde do asimptote (pravokotnica nanjo) je kar b – izpeljite sami –

pomembna je za določitev vrtilne količine, ko je objekt (recimo foton) zelo oddaljen. Ekscentričnost hiperbole je: $e=(a^2+b^2)^{1/2}/a$; parameter p (semi-latus rectum – tangenta temena, v gorišču pa razdalja do krivulje) pa ima vrednost: $p = b^2/a$. Toliko torej rabimo vedeti o hiperboli, da lahko izvedemo klasični račun odklon žarka ob zvezdi – žal 2x napačen. A vaja je zelo poučna in nas hkrati popelje do razmišljanja o principih splošne relativnosti.

Poglejmo na kratko, kaj nam torej ponuja Newtonov klasični opis potovanja svetlobe ob zvezdi. Za delec, ki ima vsoto potencialne in kinetične energije večjo od nič velja, da potuje po hiperboli ($x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$) – recimo v bližini **zvezde**, ki je **v gorišču hiperbole**. Zapišimo energijski zakon za tak primer: $E=E_k+E_p=GmM/(2a) > 0$, v neskončnosti je energija zgolj kinetična $mv^2/2$ [potencialna energija $E_p = -GmM/r = -GmM/\infty = 0$ je v neskončnosti namreč 0]. Parameter **a** je glavna polos: **2a** je razdalja med temenoma hiperbole. **Nakažimo še pot do zelo pomembnega izraza za celotno mehanično energijo:** $E = E_k + E_p = mv^2/2 - GmM/r = GmM/(2a)$.

Zapišimo energijo, ko je telo najbližje zvezdi – v temenu: $E_1 = mv_1^2/2 - GmM/(c - a)$; v neskončnosti pa velja: $E_2 = mv_2^2/2 - GmM/\infty = mv_2^2/2$.

Vrtilna količina v temenu je: $L_1 = mv_1(c - a)$; v neskončnosti pa kar: $L_2 = mv_2b$.

Ker obravnavamo sistem brez zunanjih navorov in sil, se ohranjata tako vrtilna količina kot energija teles. Poznamo torej dve enačbi - za energijo in vrtilno količino ($E_1 = E_2$ in $L_1 = L_2$) z dvema neznankama (hitrosti v_1 in v_2):

$mv_1^2/2 - GmM/(c - a) = mv_2^2/2$

$mv_1(c - a) = mv_2b$

Iz enačb recimo izrazimo v_2 (sami se potrudite, upoštevajte, da je $c^2 = a^2 + b^2$, prvi delni rezultat je:

$v_2^2 = GM/a$),

jo vstavimo v izraz za energijo v neskončnosti in končni rezultat je zelo preprost:

$E = E_k + E_p = mv_2^2/2 = GmM/(2a)$

Vrnimo se k uklonu svetlobe - kako je s fotoni, kvanti svetlobe v gravitaciji? S fotoni so, po definiciji gravitacijske sile ($F = Gm_1m_2/r^2$, ki deluje le med masnimi delci m_1 in m_2), v Newtonovi mehaniki problemi, saj nimajo mase – in kako bi torej gravitacija sploh lahko delovala na nemasne delce? A mnogi so to protislovje nekako čarovniško preskočili in fotonu pripisali virtualno maso $m_f = E/c^2 = h\nu/c^2$. Vsekakor ima svetloba, glede na Sonce, energijo večjo od nič, saj nam drugače Sonce ne bi pošiljalo izsevane energije (drugače bi bilo, če bi »živeli« v bližini črne luknje) ... Fotoni torej potujejo po hiperboli (naj bi). In odklon svetlobe od prvotne smeri bi naj ustrezal kar enačbam asimptot hiperbole ($y=\pm bx/a$). Kot odklona asimptote hiperbole od tangente temena se izpelje kar iz razmerja polosi, glejte sliko:

$\tan(\vartheta/2) = a/b$.

Ker po energijskem zakonu velja, da ima delec daleč vstran od centralne zvezde z maso **M** le kinetično energijo $E = mv^2/2 = GmM/(2a)$, in če privzamemo, da je hitrost **v** enaka kar hitrosti svetlobe **c** (saj iščemo pot fotona), dobimo za parameter **a** vrednost: $a = GM/c^2$. Poiščimo še parameter **b**. Če foton potuje čisto blizu površine zvezde, ki je v gorišču hiperbole, velja za najbližjo razdaljo »zvezda – foton«, da je ta kar enaka polmeru zvezde **R**:

$R = c - a = ae - a$

Ker je **$R = c - a = (a^2+b^2)^{1/2} - a$**, lahko iz zadnje enačbe izrazimo polos **$b = ((R + a)^2 - a^2)^{1/2}$**. A ker je polos **$a = GM/c^2$** veliko manjša od polosi **b** (pri Soncu se namreč ne opazi velikih odklonov svetlobe), se na koncu izkaže (ker je **$a = GM/c^2 = 1475{,}7$ m** in je **$a/R = 2{,}1 \cdot 10^{-6}$**, in ker je **$b>p>R$**, lahko **pri vrednotenju** polosi **b**, razmerje **a/R** zanemarimo), da je parameter **b** v realnosti za fotone kar enak polmeru zvezde **R.** Velja za zvezde podobne Soncu, **$b = R((1 + a/R)^2 - a^2/R^2)^{1/2} = R((1 +0)^2 - 0)^{1/2} = R$**, pri masivnih kompaktnih zvezdah ta približek ne velja.

Klasična enačba odklona žarka ob Soncu je torej za **$a = GM/c^2$** in **$b = R$** kar:

$$\tan(\vartheta/2) = a/b = GM/(c^2R)$$

Ker so odkloni majhni (**$\tan(\vartheta/2) \approx \vartheta/2$**), velja:

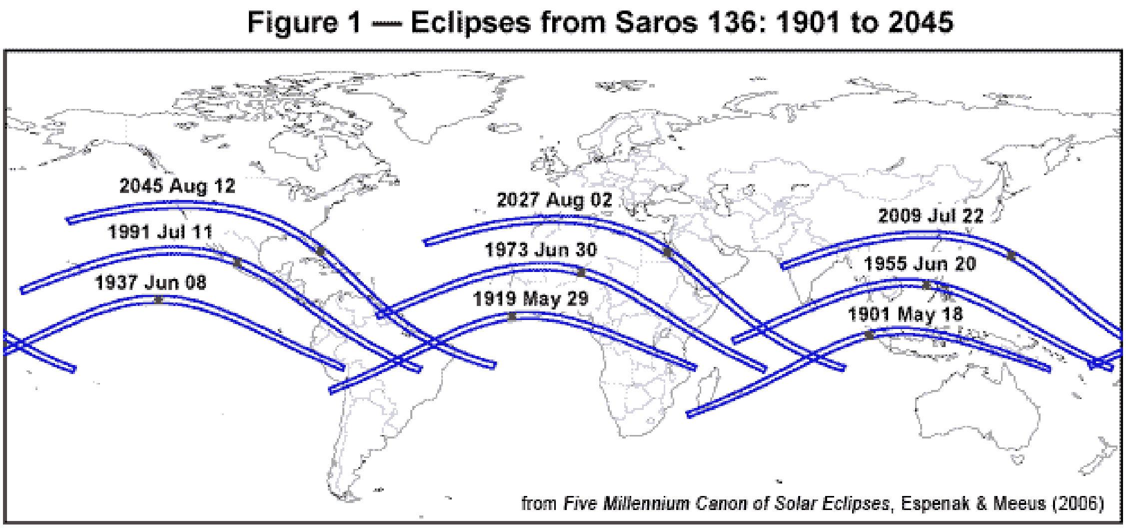
$$\vartheta/2 = GM/(c^2R)$$

Celoten kot odklona bi torej naj bil:

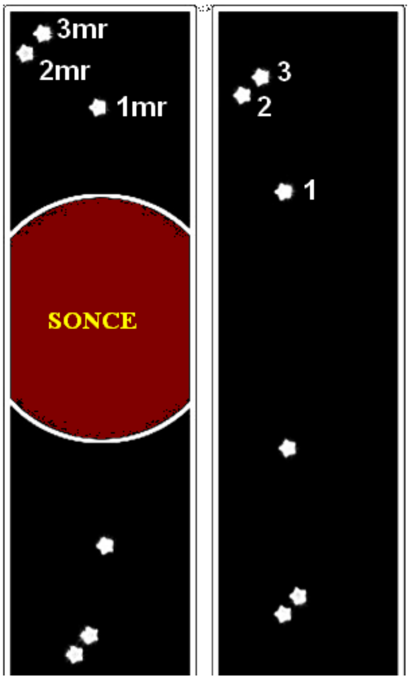
$$\vartheta = 2GM/(c^2R) = 0{,}875'' \qquad (???)$$

A rezultat je za 2x premajhen (pravilen izraz je: $\vartheta = 4GM/(c^2R) = 1{,}75''$), zato so pri enačbi vprašaji. To je dobra vaja, ki nam da misliti, zakaj klasična Newtonova fizika tukaj odpove in kaj se skriva za splošno teorijo relativnosti ...?!.

Med Sončevim mrkom, 29. maja leta 1919, je Einsteinovo napoved (1.75 loč. sekunde) odklona žarka zaradi gravitacije (bolje, zaradi ukrivljenosti prostora-časa) potrdil (približno) Sir Arthur Eddington (izjemen dosežek). Potrditev je tudi matematiki dala nov zagon glede izjemne uporabnosti neevklidske geometrije.



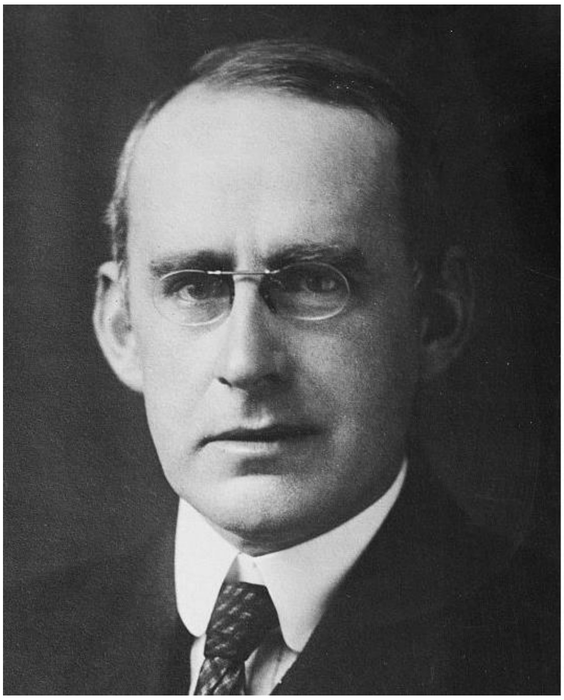
Slika: Poti popolnih Sončevih mrkov, ki pripadajo sarosu 136 – zelo nazoren prikaz dinamike mrkov v sarosu. Temu sarosu je pripadal tudi mrk Eddingtonove potrditve Einsteinove splošne teorije relativnosti (29. maj 1919) – fotografiranje odklona žarkov oddaljenih zvezd ob Soncu. Tudi mrk iz 22. jul. 2009 – ki se je na Kitajskem žal skril za oblake - je del cikla sarosa 136. Mrk sarosa 136 pa se bo spet pokazal 2. avg. 2027, tudi na poti čez bližnji Gibraltar – vredno ogleda. Trenutno so mrki sarosa 136 zelo dolgi – trajajo dobrih 6 minut.

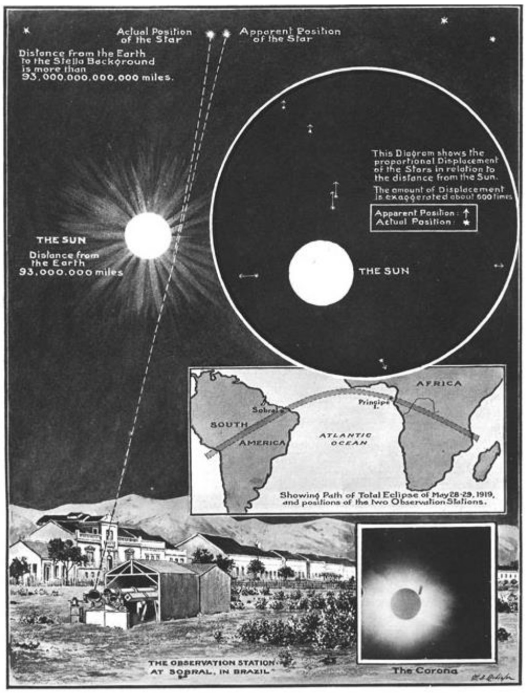


Optical Deflection of Starlight During Eclipses

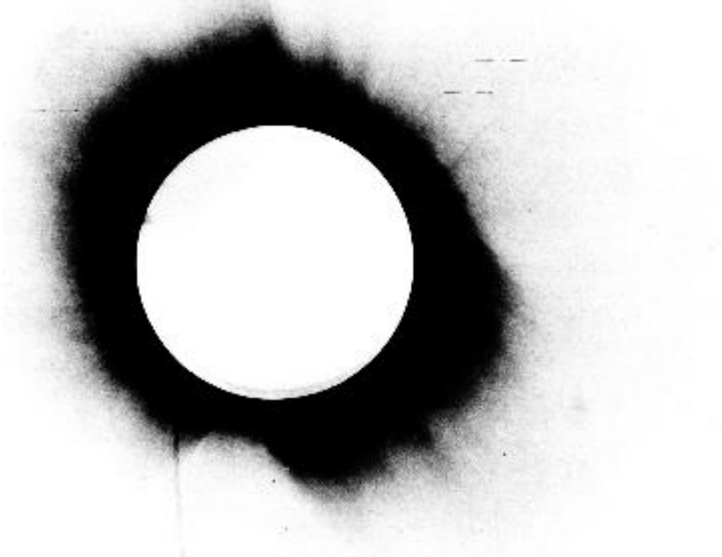
Date	Location	arc secs
29 May 1919	Sobral	1.98 ± 0.16
	Principe	1.16 ± 0.40
21 Sep 1922	Australia	1.77 ± 0.40
		1.42 to 2.16
		1.72 ± 0.15
		1.82 ± 0.20
9 May 1929	Sumatra	2.24 ± 0.10
19 June 1936	USSR	2.73 ± 0.31
	Japan	1.28 to 2.13
20 May 1947	Brazil	2.01 ± 0.27
25 Feb 1952	Sudan	1.70 ± 0.10
30 Jun 1973	Mauritania	1.66 ± 0.19

Slika: Položaj zvezd med in po mrku. Odmik med mrkom je 1.75 loč. sekunde, to je pričakovana vrednost za zvezde tik ob Soncu. Tabela desno kaže na težave pri meritvah odklona svetlobe – tudi med mrki po letu 1919.

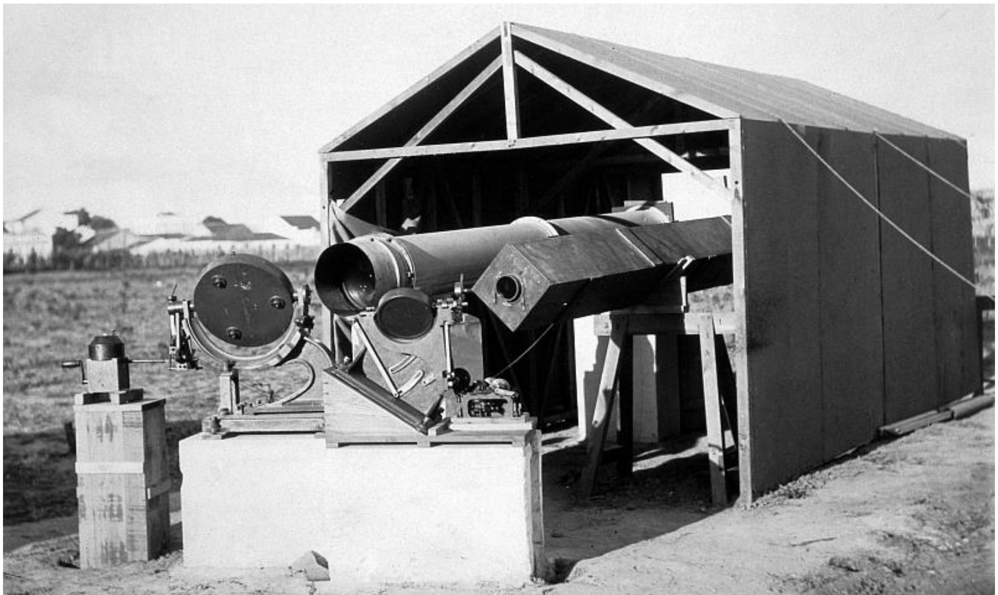




Slika: Napoved Eddingtonovega odkritja. Credit: Illustrated London News (1919). Eddingtonovi odpravi sta slikali mrk iz otoka Principe (zahodna Afrika) in iz kraja Sobral (Brazilija) – nikjer ni bilo ravno idealno vreme.



Slika: Fotografija mrka 29. 5. 1919, negativ – na njej se komaj opazi zvezde in njihov premik (črtici desno zgoraj). Mrk se je zgodil blizu **Plejad** in **Hijad** – kar je bilo idealno, saj je tam nebo bogato posejano z zvezdami. **Tudi sam Eddington nekoliko dvomi o odkritju:** » *... one can say with certainty that the effect (at the solar limb) lies between 0.87" and 1.74*" ... «, pripomnil je še, da gre zgolj za preliminarne meritve, in da bo dokončna vrednost odklona zvezd naknadno določena.



Slika: Oprema uporabljena med mrkom 29. 5. 1919 v kraju Sobral, Brazilija. *Credit SSPL, via Getty Images.* Sliko mrka so v teleskop usmerili z ogledalom – nazorno vidno iz fotografije postavitve opreme.

Še zgodovinsko ozadje in dvomi glede Eddingtonovih meritev

Eddington je bil angleški, Einstein pa nemški pacifist. Eddington je hotel Einsteinu nekako pomagati – tudi preko potrditve odklona svetlobe zvezd med mrkom. To je bil hkrati ČAS NOVEGA UPANJA PO HUDI

SVETOVNI VOJNI ... A Eddington je bil glede verodostojnosti meritev precej na majavih temeljih (odmik zvezd od Sonca je bil manjši od velikosti zvezde na sliki, pri nekaterih v napačno smer – proti Soncu). A na koncu so drugi potrdili to, kar je on naredil precej čez palec (v kontekstu časa) - bolj iz prijateljstva in želje pomagati novi teoriji k življenju – kot pa iz neoporečne analize (dokaj neposrečenih) slik. A tudi J. Kepler je pred 400 leti verjel Galileju na pisano besedo (drug od drugega sta bila oddaljena dobrih 1000 km, Praga - Padova). Verjel je, da je Galilei v resnici videl Jupitrove lune, in da potujejo okrog planeta (čeprav Galileju tega noben »kolega« iz univerze ni hotel potrditi). Zakaj, ker je J. Kepler zaupal svoji mehaniki.

Lorentz pravi glede Eddingtonovih meritev naslednje: "*Verjetno lahko verjamemo (glede na obseg ugotovljenega odklona), da odklon svetlobe v Sončevi atmosferi sploh ni relevanten pojav* [to je bil namreč glavni argumenti za dvom]*, ampak je v resnici zaznan odklon zaradi gravitacije same.* ***To je vsekakor eden od najimenitnejših rezultatov, ki jih je znanost kdaj dosegla in lahko smo izjemno zadovoljni****.*"

Na srečo lahko danes bolj natančne meritve opravimo v radijskih valovnih dolžinah, zlasti s pomočjo kvazarjev in mrk ni več nujni pogoj za take meritve. Analiza leta 2004, v kateri je bilo obdelanih več kot 2 milijona opazovanj VLBI (Very Long Baseline Interferometry), da razmerje med dejansko opazovanimi odkloni in odkloni, ki jih predvideva splošna relativnost, kar 0,99992 ± 0,00023 (izjemna natančnost). Tako je bila dramatična napoved iz leta 1919 tudi retroaktivno utemeljena.

Enega prvih poskusov slikanja mrka in detekcije odklona svetlobe bi naj izvedel že Erwin Finlay-Freundlich, iz Astronomskega observatorija Berlin. Freundlich se je leta 1914 (to je še pred Einsteinovim pravilnim izračunom odklona svetlobe) odpravil slikat mrk na Krim, vendar se je prej začela prva svetovna vojna. Preden je prišlo do mrka, je bil aretiran kot vohun. Tudi ekipa iz observatorija Lick v Kaliforniji ni uspela pripotovati na krimski mrk - a je tako deževalo. Njihovo kamero so, kljub zamudi, zaplenili Rusi in tako ni bilo odprave na mrk v Venezuelo leta 1916.

Po Eddingtonovi objavi "uspešnih" meritev odklona svetlobe ob Soncu (med mrkom 1919), je Einstein takoj postal svetovna ikona - genij - iz zmedenega skuštranega znanstvenika so ga mediji preobrazili v superzvezdo sveta znanosti – v »preroka«. A mnoge temelje novi fiziki, kot se razbere iz zgodovine znanosti, so postavili že številni raziskovalci pred njim. Podobno kot je Newtonu trasiral pot že J. Kepler in delno R. Hooke, pa še kdo ...

Mrki so nam torej v veliko pomoč pri iskanju položaja Zemlje in človeka v vesolju in hkrati pri iskanju odgovorov, kateri fizikalni opis sveta je primernejši:

- ali klasični Newtonov opis sveta, v katerem vladajo absolutni linearni čas v prostoru treh dimenzij in hipna sila gravitacije vezana zgolj na maso, ki določa dinamiko vesolja in teles v njem,
- ali Einsteinov opis sveta, kjer masa-energija ukrivljata prostor-čas štirih dimenzij (gravitacija je smo posledica ukrivljenosti, gravitacijski pospešek in pospeševanje nekega sistema sta ekvivalentna), kjer sta čas in merjenje razdalj vezana na opazovalca in ukrivljenost prostor-časa (večja je ukrivljenost, recimo zaradi velike mase, gravitacije – počasneje teče čas – čas je tudi odvisen od relativne hitrosti), tudi o dinamiki teles in svetlobe odloča ukrivljenost prostor-časa, gravitacijska motnja potuje s hitrostjo svetlobe (posledica so gravitacijski valovi – letos je za detekcijo valov bila podeljena Nobelova nagrada), hitrost svetlobe pa je hkrati zgornja meja za pošiljanje informacij, energije po prostor-času; koncept ukrivljenega prostor-časa tudi elegantno razreši dilemo, zakaj se lahko nemasni delec (foton) krivo giblje po vesolju, razloži gravitacijsko lečenje.

Energija delca zaradi visoke hitrosti in gravitacije, pogled od daleč, pogled z masivnega telesa

Vrnimo se k metriki in jo še rahlo preoblikujemo.
Enačbo delimo z lastnim časom $d\tau$, že prej smo vpeljali kot zasuka $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$:
$\mathbf{c^2 = c^2(1 - r_s/r)(dt/d\tau)^2 - (dr/d\tau)^2/(1 - r_s/r) - r^2(d\Omega/d\tau)^2}$
- enačbo pomnožimo z izrazom $(1 - r_s/r)$ in dobimo izraz,
$\mathbf{(1 - r_s/r)c^2 = c^2(1 - r_s/r)^2(dt/d\tau)^2 - (dr/d\tau)^2 - (1 - r_s/r)r^2(d\Omega/d\tau)^2}$

Levi člen $\mathbf{(1 - r_s/r)c^2}$**,** če ga pomnožimo z maso delca, predstavlja neke vrste **mirovno energijo delca v potencialu gravitacije** masivnega objekta (rec. zvezde).

Tako kot v četvercu brez teže, se tudi v tej enačbi skriva energija. Če zgolj osvežimo spomin in še enkrat izračunamo velikost četverca gibalne količine brez gravitacije in naredimo še primerjavo s četvercem z gravitacijo za zelo oddaljenega opazovalca, ki ne čuti gravitacije, potem velja (upoštevajmo pa že znano Einsteinovo enačbo za polno energijo delca $\mathbf{E = \gamma mc^2}$):
$(cd\tau, 0) = (cdt, dx) = (cdt, vdt) = (c\gamma d\tau, v\gamma d\tau) = d\tau(c\gamma, v\gamma)$
$(c, 0) = (c\gamma, v\gamma) = (cE/(mc^2), v\gamma)$ – četverec brez gravitacije ($\mathbf{\gamma = E/(mc^2)}$)
$(c, 0) = (c\mathbf{(1 - r_s/r)^{1/2}(dt/d\tau)}, ...)$ – prvi člen četverca z gravitacijo, od zgoraj
[- *še zapis celotnega četverca za gravitacijo* $\mathbf{ds}$ $= (cd\tau, 0, 0, 0) = (c(1 - r_s/r)^{1/2}dt, dr/(1 - r_s/r)^{1/2} , rd\vartheta , r \sin \vartheta\, d\varphi)$]

Primerjava nama da za prvi člen obeh četvercev naslednji izraz:
$\mathbf{E/(mc^2) = (1 - r_s/r)^{1/2}(dt/d\tau) = (1 - r_s/r)^{1/2}\gamma}$

Tako dobimo energijo delca še v gravitacijskem polju:

$$\mathbf{E = (1 - r_s/r)^{1/2}\gamma mc^2}$$

Spet bi lahko izpeljali, pa to naredite sami, povezavo:
$\mathbf{E^2 = (c^2m)^2 + (cp)^2}$
Kjer je **E** polno energija delca, mirovna energija delca je $\mathbf{c^2m}$ in gibalno količina (kvadrat) delca je $\mathbf{p^2 = m^2((dr/d\tau)^2/(1 - r_s/r) + r^2(d\Omega/d\tau)^2)}$.

Za energijo delca velja enako kot pri posebni relativnosti, le da nastopi še gravitacijska (potencialna) energija, na koncu lahko izraz še razčlenimo:

E = Eo + Ekin + Epot,

kjer je:

$\mathbf{E = (1 - r_s/r)^{1/2}\gamma mc^2}$ - celotna energija, izpeljali zgoraj

$\mathbf{E_o = mc^2}$ - mirovna energija

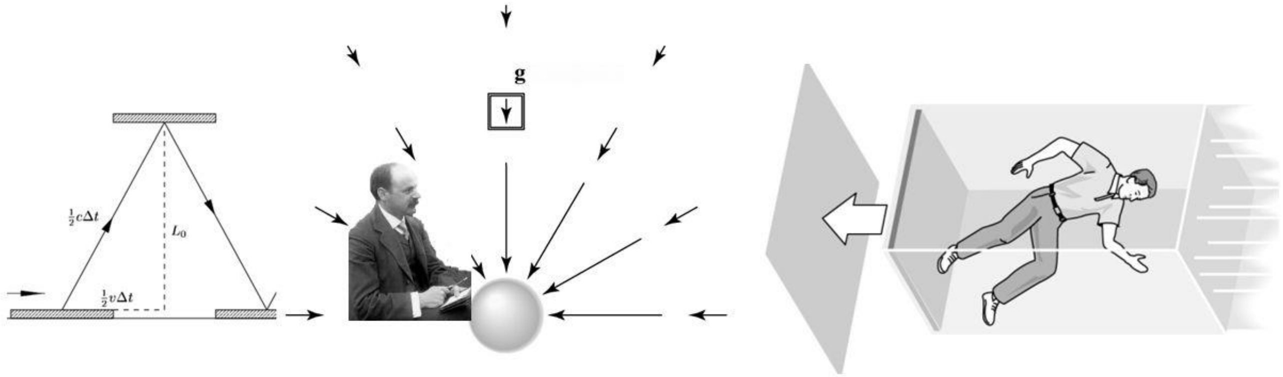
$\mathbf{E_{kin} = (\gamma - 1)mc^2 = ((1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1)mc^2}$ - kinetična energija (za male hitrosti je $mv^2/2$)

$\mathbf{E_{pot} = ((1 - r_s/r)^{1/2} - 1)\gamma mc^2}$ - potencialna energija (za male hitrosti in gravitacijo velja $-GmM/r$)

Lorentzov člen je $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. V splošnem velja, da je v^2 po Pitagoru vsota kvadratov radialne in tangentne hitrosti $v^2 = v_r^2 + v_t^2$.

Pri šibki gravitaciji in majhni hitrosti delca moramo dobiti klasičen izraz za energijo - in to tudi zares velja. Pri majhni hitrosti je $\mathbf{E_{kin} = ((1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1)mc^2 \approx ((1 - v^2/(2c^2)) - 1)mc^2 = mv^2/2}$. Pri majhni gravitaciji in hitrosti velja, da je $\gamma \approx 1$, in ko je gravitacija šibka, velja $(1 - r_s/r)^{1/2} = (1 - 2GM/(rc^2))^{1/2} \approx 1 - GM/(rc^2)$, od koder sledi $E_{pot} = ((1 - r_s/r)^{1/2} - 1)\gamma mc^2 \approx (1 - GM/(rc^2) - 1)mc^2 = - GMm/r$.

Schwarzschildova metrika v drugi obliki ($\mathbf{(1 - r_s/r)c^2 = c^2(1 - r_s/r)^2(dt/d\tau)^2 - (dr/d\tau)^2 - (1 - r_s/r)r^2(d\Omega/d\tau)^2}$), **recimo za opazovalca na matični zvezdi (glej sliko, kjer je simbolično opazovalec na zvedi K. Schwarzschild),** je po obliki navidezno enaka kot za oddaljenega opazovalca (opazujemo gibajoč delec – nanj vpliva tako efekt hitrosti, kot gravitacije)



$\mathbf{(1 - r_s/r)c^2 = c^2(1 - r_s/r)^2(dt/d\tau)^2 - (dr/d\tau)^2 - (1 - r_s/r)r^2(d\Omega/d\tau)^2}$

- a sedaj za gibajoč delec **velja** $\mathbf{E/(mc^2) = (1 - r_s/r)dt/d\tau}$ **(ali tudi** $\mathbf{E^2/(m^2c^2) = c^2(1 - r_s/r)^2(dt/d\tau)^2}$**),** saj je čas dt v tem primeru enak $dt = \gamma d\tau/(1 - r_s/r)^{1/2}$. Zakaj? - ker na izračun lokalnega lastnega časa $d\tau$, poleg gibanja dt/γ - enako kot pri posebni relativnosti,

- sedaj dodatno vpliva še gravitacija s členom $(1 - r_s/r)^{1/2}$, kar smo zapisali že na začetku poglavja o gravitaciji in metriki;

sedaj torej velja $\mathbf{d\tau = dt(1 - r_s/r)^{1/2}/\gamma}$ (na čas torej vpliva tako efekt hitrosti, kot gravitacije) ali $\mathbf{dt/d\tau = \gamma/(1 - r_s/r)^{1/2}}$), tako da še zmeraj velja znana povezava

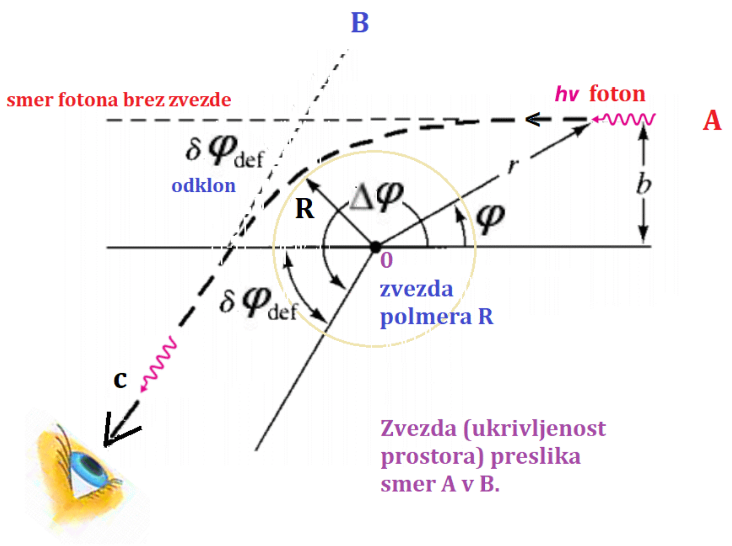
$\mathbf{E/(mc^2) = (1 - r_s/r)^{1/2}\gamma}$.

To dejstvo zapišemo, upoštevamo, še v nekoliko preoblikovani Schwarzschildovi metriki:

$$\mathbf{(1 - r_s/r)c^2 = E^2/(m^2c^2) - (dr/d\tau)^2 - (1 - r_s/r)r^2(d\Omega/d\tau)^2}$$

Iz zadnje enačbe se lahko, z nekaj matematične telovadbe, izpelje vrsto pojavov (uklon žarka ob zvezdi – to ravno počnemo, zasuk perihelija, gravitacijski premik frekvence svetlobe, zamik časa, ur – to bomo tudi še poračunali ...).

Orbita okrog središčne mase in korektna izpeljava odklona žarka



Iščemo zasuk smeri žarka, ki je večji od 180 °, oziroma razliko Δφ - 180 °, ki je na sliki označena s kotom $\delta\varphi_{def}$ (The angle of deflection of light that passing close to the Sun).

Žarek (matematično) prihaja z neskončnosti in potuje v neskončnost v nasprotni smeri, če ni gravitacije (φ teče od 0 ° do 180 °, glejte sliko), če je masa (rec. zvezde) velika in posledično gravitacija (bolje ukrivljenost), potem je kot Δφ > 180 °.

Še pristop (opis gibanja) preko zapisa vrtilne količine in energije delca v orbiti zvezde, obe količini se ohranjata. Schwarzschildovo metriko preoblikujmo z uporabo vrtilne količine (L) in energije (E) za delec m v orbiti – recimo v orbiti Sonca **($r_s = 2GM/c^2$ je Schwarzschildov radij)**.

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2 d\varphi^2.$$

Vrtilna količina, ki se ohranja, je: $L = mr^2 d\varphi/d\tau$

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{m},$$

Člen $(1 - r_s/r)c^2 dt/d\tau$ nadomestimo z energijo $E/(mc^2)$ – ta del smo že obdelali pri posebni teoriji relativnosti. Če zgolj osvežimo spomin:

$(cd\tau, 0) = (cdt, dx) = (cdt, vdt) = (c\Upsilon d\tau, v\Upsilon d\tau) = d\tau(c\Upsilon, v\Upsilon)$

$-(cm)^2 = -m^2c^2\Upsilon^2c^2/c^2 + (m\Upsilon v)^2$

$-(cm)^2 = \mathbf{-E^2/c^2} + (m\Upsilon v)^2$

V splošni relativnosti je princip polne energije E v četvercu, oziroma metriki, po analogiji s posebno teorijo, enak (izpeljali v prejšnjem poglavju).

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{mc^2}.$$

Še preprost dokaz – za vajo ne škodi. Če je gravitacijsko polje nič ali neizrazito ($r_s/r = \mathbf{2GM/(rc^2)} \approx 0$), kot je recimo na Zemlji, za večino pojavov preide energija hitrih delcev v šibki gravitaciji v obliko energije, kot jo predvideva specialna teorija relativnosti. Velja:

$d\tau/dt = (1 - v^2/c^2)^{1/2} = 1/\Upsilon$

$\mathbf{E^2/c^2 = (1 - r_s/r)mdt/d\tau = (1 - 0)m\Upsilon = m\Upsilon}$ *- izraz že poznamo, sklepanje je bilo torej pravilno*

Sedaj pa v Schwarzschildovi metriki nadomestimo zapisane konstante in izraze.

$$c^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2,$$

Tako dobimo enačbo delca.

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{m^2c^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(c^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right).$$

Časovno odvisnost je mogoče odpraviti z uporabo vrtilne količine L, saj velja $d\tau/ d\varphi = mr^2/L$.

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d\tau}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{mr^2}{L}\right)^2,$$

Kar pripelje do enačbe orbite delca, saj za izraz $(dr/d\tau)^2$ vstavimo v

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{m^2c^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(c^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right).$$

Osnovi za nadaljnjo računanje sta dve obliki zapisa preoblikovane metrike.

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2}\right)$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4}{b^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{r^4}{a^2} + r^2\right)$$

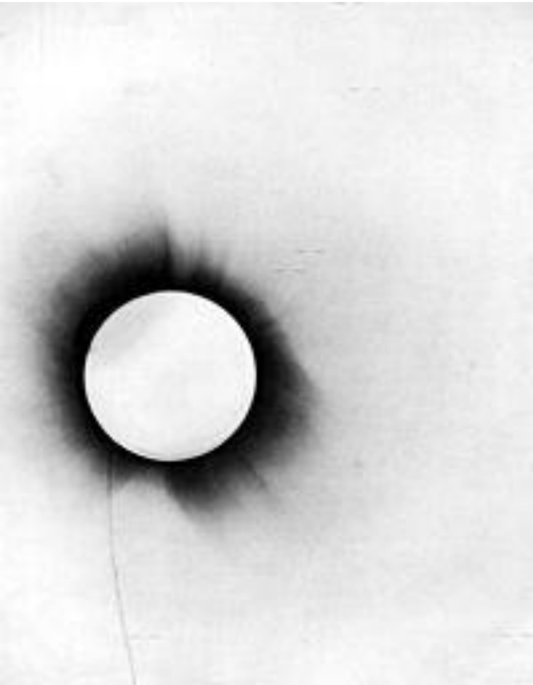
Enačbo smo poenostavili z uvedbo dveh konstant a in b (glede na začetne pogoje):

$$a = \frac{L}{mc}, \qquad b = \frac{cL}{E}.$$

Enako enačbo je mogoče izpeljati tudi preko Lagrangeove mehanike ali Hamilton – Jacobijeve enačbe. Za zasuk (φ) dobimo integral.

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2}\right)}}.$$

Sledi modificirana formula za uklon svetlobe.



Meritve odklona lege zvezd ob Sončevem mrku v bližini Sonca (pod vplivom gravitacije), ki jih je opravil Eddington leta 1919, so prepričale cel svet, da so sprejeli splošno relativnost.

Člen $1/a^2 = (mc)^2/L^2$ ima za foton, ki je brez mase, vrednost 0 (mc = 0), zato velja:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{1}{r^2}$$

Odklon svetlobe δφ oz Δφ pa se v splošnem pri sferičnem telesu (zvezdi) izračuna z integralom po celotni poti potovanja fotonov.

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{1}{r^2}}}$$

Razmerje r_s/r je prevladujoči člen za kotni odklon $\delta\varphi$ kvanta brez mase (fotona), ki prihaja iz neskončnosti in potuje proti neskončnosti. Po integralu, ki je nekoliko zahtevnejši (uvedemo novi spremenljivki u = R/r [polmer Sonca deljen z razdaljo do žarka], za diferencial du velja zveza $du = - Rdr/r^2$ in še kotno odvisnost $u = \cos\alpha$, od koder izhaja $du = - \sin\alpha\, d\alpha$). Poiščimo še parameter b, v temenu poti fotona (kjer je r =R in je ekstrem, ko velja $dr/d\varphi = 0$) je izraz za b enolično določen :

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{1}{r^2} = 0$$

$1/b^2 = (1 - r_s/R)/R^2 = (1 - 2GM/(c^2R))/R^2$

Pri Soncu je člen **b** za svetlobo praktično enak polmeru Sonca **R**. A pustimo člen **b** v polnem zapisu, saj enačba velja splošno, tudi za masivne zvezde.

Na koncu, po poenostavitvi integrala za zvezde podobne Soncu, pridemo do rešitve za odklon žarka tik ob površini Sonca. Iščemo torej izraz:

$$\delta\varphi \approx \frac{2r_s}{b} = \frac{4GM}{c^2 b} \approx \frac{4GM}{c^2 \mathrm{R}}$$

Sledi izvrednotenje integrala, ki ga ne boste našli v tabelaričnih seznamih rešenih integralov. Bo pa potek reševanja zelo poučen. Morebiti pa bo kak srednješolec, študent (tudi bivši) ob tem postopku za nazaj našel smisel matematične “telovadbe” z integrali (recimo iz četrtega letnika, ki se je takrat mnogim zdela odveč) – da torej le obstajajo področja, kjer integrali lahko, recimo ključno, prispevajo v zakladnico človeškega znanaja. Recimo pri razumevanju, potrditvi pravilnejše fizikalne slike narave, sveta, vesolja. Ta izpeljava je (bo) strogo korektna. Na koncu pa bomo, poleg matematičnih pravil, vključili še fizikalni čut in sicer z razrešitvijo integrala za parameter (bolje spremenljivko) majhne vrednosti (**$GM/(c^2R) = 2{,}1 \cdot 10^{-6}$,** ta vrednost velja za Sonce) in bomo tako prišli do elegantne končne rešitve.

Tokrat (zaradi postopka integriranja – po domače, seštevanja malih koščkov) zapišimo enačbo za odklon žarka ob zvezdi v razširjeni obliki, s **Schwarzschildovim radijem** v osnovnem zapisu **$r_s = 2GM/c^2$.** Integrirali bomo od temena poti žarka (ko oklepa smer “središče zvezde – teme“ kot $\alpha_1 = 0°$), do $\alpha_2 = \pi/2$ (90°), ko je žarek že zelo daleč vstran od zvezde (matematično rečeno v neskončnosti). Vrednost se pomnoži z dve, ker gre za simetričen pojav (pot žarka iz neskončnosti do zvezde – do temena ob zvezdi – in naprej do neskončnosti; lahko pa sta meji tudi kar $[-\pi/2, \pi/2]$, ko seveda množenje z dve odpade).

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{E}{cL}\right)^2 - \left(1-\frac{2MG}{c^2 r}\right)\frac{1}{r^2}$$

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \left(1-\frac{2MG}{c^2 r}\right)\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{1}{b^2} = \left(1-\frac{2MG}{c^2 R}\right)\frac{1}{R^2}$$ *(v temenu r = R in dr = 0)*

$u = R/r = \cos\alpha$ $\quad du = -R\,dr/r^2$ $\quad du = -\sin\alpha\, d\alpha$

$0 < u < 1,\ 0 < \alpha < \pi/2$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \left(1-\frac{2MG}{c^2R}\right) - \left(1-\frac{2MG\,u}{c^2 R}\right)u^2$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 1 - u^2 - \frac{2MG}{c^2R}\left(1-u^3\right)$$

$$d\varphi = [1-u^2-\frac{2MG}{c^2R}(1-u^3)]^{-1/2}\,du$$

$$= \frac{(1-u^2)^{-1/2}du}{[1-(2MG/(c^2R))(1-u^3)(1-u^2)^{-1}]^{1/2}}$$

$$d\varphi = \left[1-(2MG/(c^2R))(1-\cos^3\alpha)\sin^{-2}\alpha\right]^{-1/2}d\alpha$$

Velja:

$$\frac{1-\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)} = \cos\alpha + \frac{1}{1+\cos\alpha}$$

$$d\varphi = \left[1-\frac{2MG}{c^2R}\left(\cos\alpha+\frac{1}{1+\cos\alpha}\right)\right]^{-1/2}d\alpha$$

Ker je: $MG/(c^2R) = 2{,}1 \cdot 10^{-6}$

- uporabimo klasični približek $(1+\epsilon)^p \simeq 1+p\epsilon$

$$d\varphi = \left[1+\frac{MG}{c^2R}\left(\cos\alpha+\frac{1}{1+\cos\alpha}\right)\right]d\alpha$$

$$\Delta\varphi = 2\int_0^{\pi/2}\left[1+\frac{MG}{c^2R}\left(\cos\alpha+\frac{1}{1+\cos\alpha}\right)\right]d\alpha$$

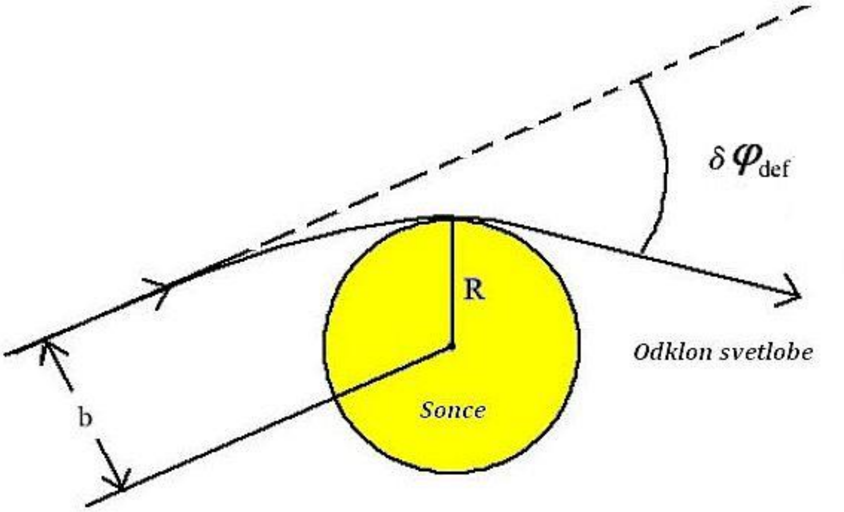
$$= 2\left[\alpha+\frac{MG}{c^2R}\left(\sin\alpha+\tan\frac{\alpha}{2}\right)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \pi + \frac{4MG}{c^2R}$$

Smer π pomeni prvotno smer, če ni gravitacije zvezde (če je prostor raven), prispevek:

$$\delta\varphi \approx \frac{4GM}{c^2 R}$$

pa predstavlja odmik žarka od prvotne smeri zaradi ukrivljenosti prostora ob zvezdi, recimo Soncu.



Čeprav je ta formula le približna (za zvezde podobne Soncu pa čisto korektna), je jasno, da je za večino meritev pojava gravitacijskega lečenja odločilno razmerje r_s/r. Za svetlobo, ki potuje mimo površine Sonca, je kotni zasuk žarka okoli 1.75 ločnih sekund.

Še druga pot do izračuna odklona žarka preko splošne relativnosti - manj prepričljiva

Spet se bomo sklicevali na Schwarzschildovo metriko – oglejmo si člen ($-c^2dt^2$):

$-c^2dt'^2 = -c^2dt^2(1 - 2GM/(c^2r)) + dr^2/(1 - 2GM/(c^2r)) + r^2d\Omega^2$

Kako vidi pot žarka opazovalec od daleč? Člen $r^2d\Omega^2$ je praktično nič (v tem primeru nas tangentna komponenta hitrosti ne zanima), uklon žarka je tudi zelo majhen, hitrost je $v = dr/dt$. Teoretično se vprašajmo, kolikšna je radialna hitrost iz perspektive opazovalec na žarku, ko je $-c^2dt'^2 = 0$, velja:

$0 = -c^2\, dt^2\, (1 - 2GM/(c^2r)) + dr^2/(1 - 2GM/(c^2r))$

$dr^2/dt^2 = v^2 = c^2\, (1 - 2GM/(c^2r))^2$

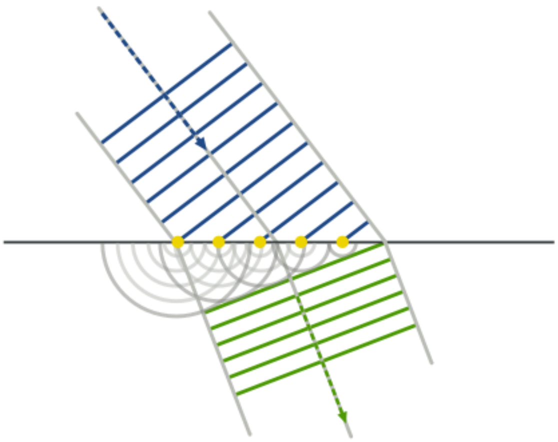
$\mathbf{v = c(1 - 2GM/(c^2r))}$

Do enakega rezultata pridemo, če privzamemo, da je $dr = dr'(1 - 2GM/(c^2r))^{1/2}$ in $dt = dt'/(1 - 2GM/(c^2r))^{1/2}$ (dr se nanaša na krčenje dolžin, dt pa na podaljšanje časa). Velja:

$dr/dt = v = dr'(1 - 2GM/(c^2r))^{1/2}/(\, dt'/(1 - 2GM/(c^2r))^{1/2}) = (1 - 2GM/(c^2r))dr'/dt'$

$v = c(1 - 2GM/(c^2r))$.

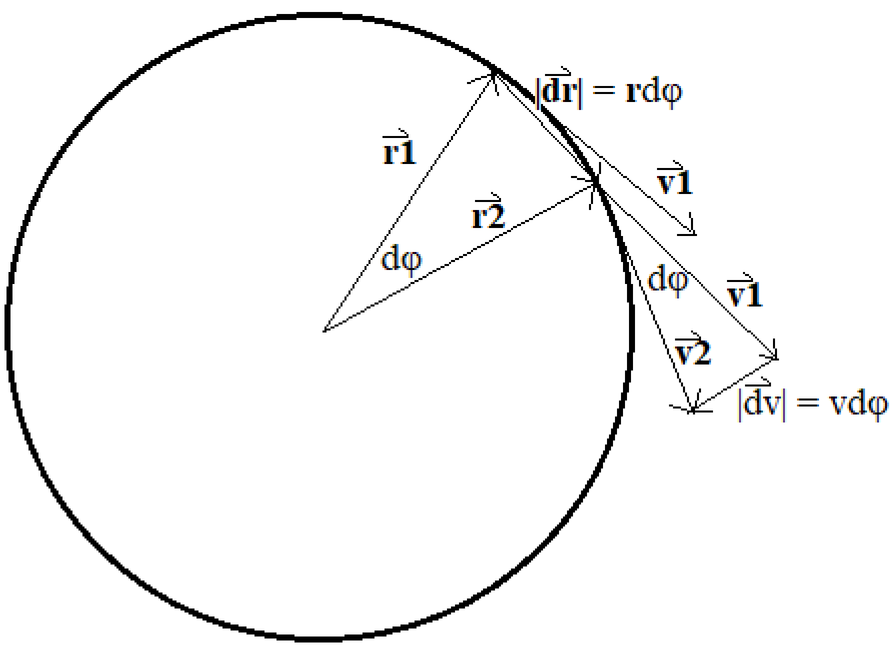
Žarek ne potuje zgolj radialno, a za nas je zanima ravno ta komponenta odklona – radialna smer gibanja, ki odklanja žarek iz prvotne smeri) za zvezde z maso in velikostjo primerljivo s Soncem. Kako naprej - pomagamo si s Huygensovim razmislekom.



Huygensovo načelo (tudi Huygens-Fresnelovo načelo) o lomu in uklonu valovanja pravi, da je vsaka točka valovne fronte izhodišče novega vala, ki ga imenujemo elementarni val. Nova valovna fronta je sestavljeni val iz vseh elementarnih valov (ta princip v splošnem vsi poznamo preko lomnega zakona za svetlobo, ko le ta prehaja med dvema snovema z različnima lomnima količnikoma n_1 in n_2: $\sin \varphi_1/\sin \varphi_2 = c_1/c_2 = n_2/n_1$).

Pomagajmo si še z enačbo uklona žarka v snovi, kjer se nekoliko spreminja lomni količnik, za primer na sliki – kjer je zapisan diferencial kota odklona.

$|\vec{v1}| = |\vec{v2}|$ in $|\vec{r1}| = |\vec{r2}|$



Na poti, ki je del krožnice, veljajo naslednje povezave med zasukom $d\varphi$, polmerom (r), hitrostjo (v) in potjo ($ds = dr = rd\varphi$) in ($dv = vd\varphi$) – gre za vektorske količine. Med velikostmi sprememb in diferenciali pa velja naslednja povezava: $v/r = dv/dr$.

Na spodnji sliki pa je podana povezava med spremembo hitrosti zaradi spremembe radija v radialni smeri r + dr. Iz slike se razbere (za linearno povezavo med polmerom r in hitrostjo v, recimo pri spremembi hitrosti svetlobe v neki snovi – kar povzroči odklon žarkov, lom svetlobe od prvotne smeri), da je sprememba poti ds pri radiju r in zasuku za kot dφ, enaka ds = rdφ. Pri povečanju radija za dr pa velja za spremembo poti ds' = (r + dr)dφ. Velja pa tudi, da je ds = vdt in ds' = (v+dv)dt. Če delimo izraza za poti pri spremembi radija za dr, velja: ds'/ds = (r+dr)dφ/r dφ = (v+dv)dt/vdt. Odkoder po krajšanju zadnjega razmerja sledi: 1 + dr/r = 1 + dv/v, oziroma dr/r = dv/v. Spet pridemo do že videnega rezultata, da je razmerje dv/dr = v/r. Iz zadnjega razmerja (dv/dr = v/r), in ker velja dt = ds/v, lahko diferencial kota dφ zapišemo v naslednji obliki:
dφ = ds/r = vdt/r = (dv/dr)dt = (ds/v)(dv/dr)

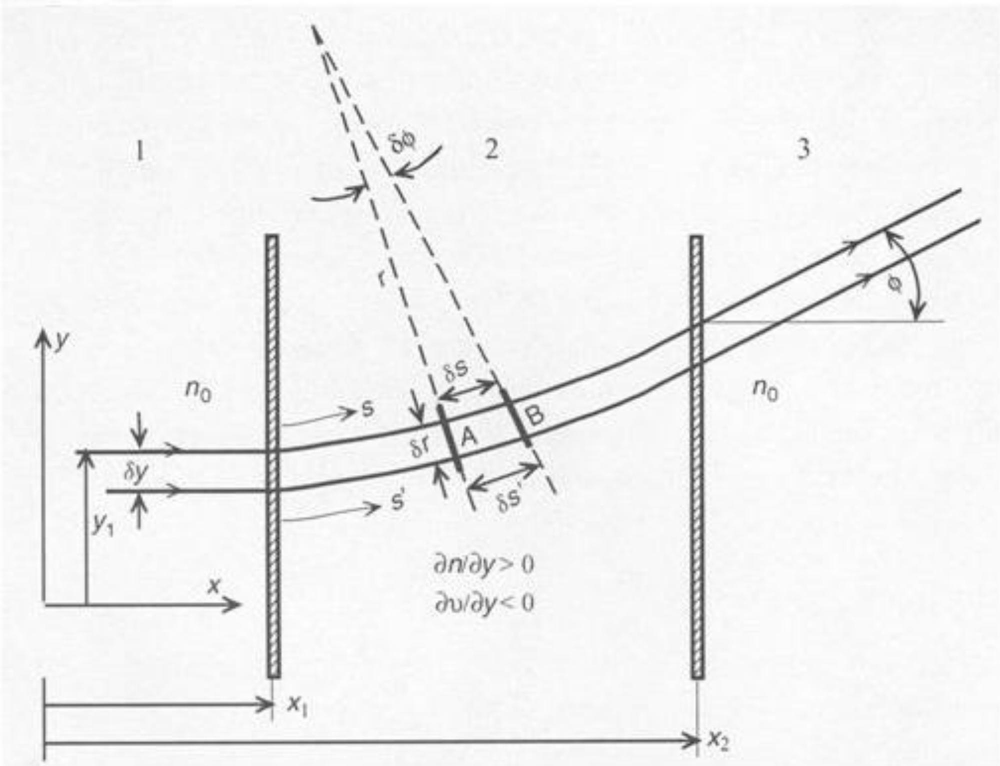
Pri svetlobi (hitrost c) je to kar povezava diferenciala odklona dφ svetlobe od prvotne smeri v snovi, kjer se spreminja lomni količnik, oziroma hitrost svetlobe. To je približna formula in (v realnosti) po integraciji velja za majhne kote, dokler velja (dv/dr = v/r) – torej sorazmernost med dv in dr. Za uklon svetlobe, pod danimi pogoji, torej velja formula:
dφ = (ds/c)(dv/dr), oziroma φ = **∫(dx/c)(dv/dy).**

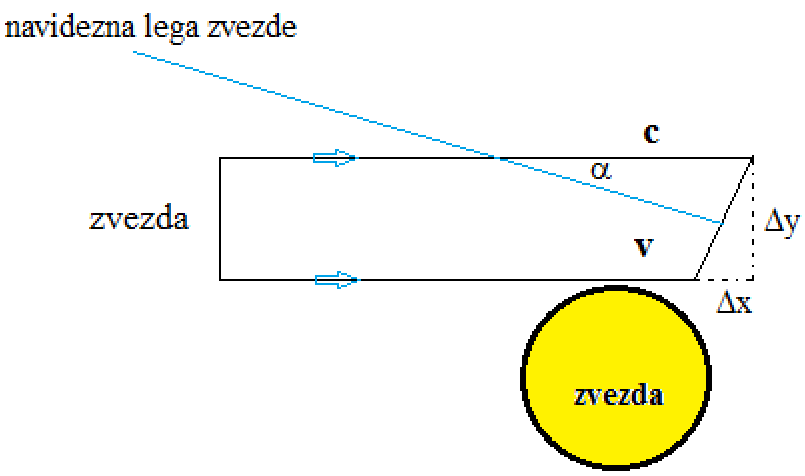
$$\delta t = \frac{\delta s}{v}$$

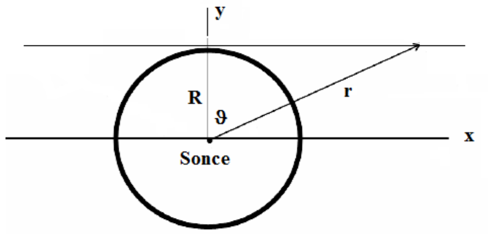
$$\delta\varphi = \frac{\delta s}{r} = \frac{v\delta t}{r} = \frac{\delta s'}{r+\delta r} = \frac{(v+\delta v)\,\delta t}{r+\delta r} = \frac{\delta v \delta t}{\delta r}$$

$$\delta\varphi = \frac{\delta v \delta s}{v\,\delta r}$$

Uklon žarka v snovi kjer se spreminja lomni količnik.







Vrnimo se k Huygensovemu načelu uklona valovanja, ki pravi, da je vsaka točka valovne fronte izhodišče novega vala.

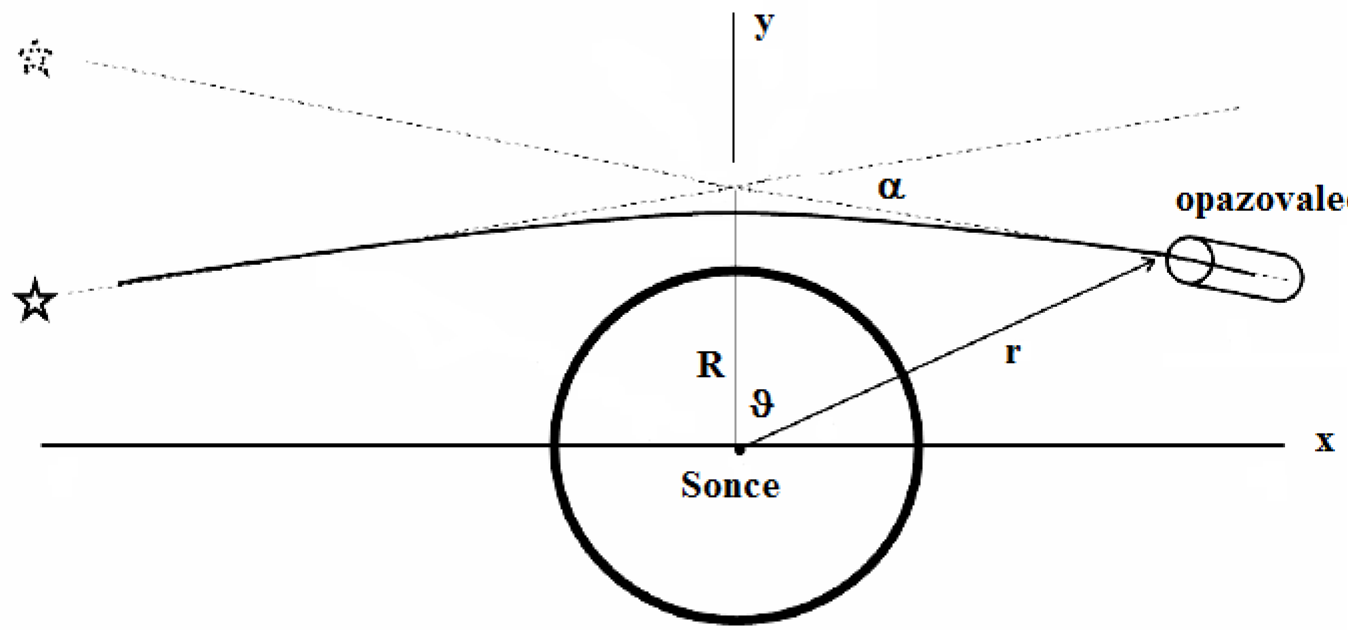
Huygensovo princip odklona svetlobe je Einstein uporabil tudi pri izračunih splošne teorije relativnosti (glej sliko) in zgoraj izpeljano enačbo odklona žarka. Za x smer velja (pri majhnih kotih odklona svetlobe) naslednja povezava med hitrostjo svetlobe c in spremembo poti: dt = dx/c. Uporabimo še izpeljani diferencial odklona svetlobe iz smeri d$\boldsymbol{\alpha}$ = (ds/c)(dv/dr). Ker gre v splošnem za zelo majhne kote, izrazimo kot uklona kar z x in y koordinatama (glejte sliko) - sledi poenostavljena enačba za kot alfa: $\boldsymbol{\alpha = \int(dx/c)(dv/dy)}$.

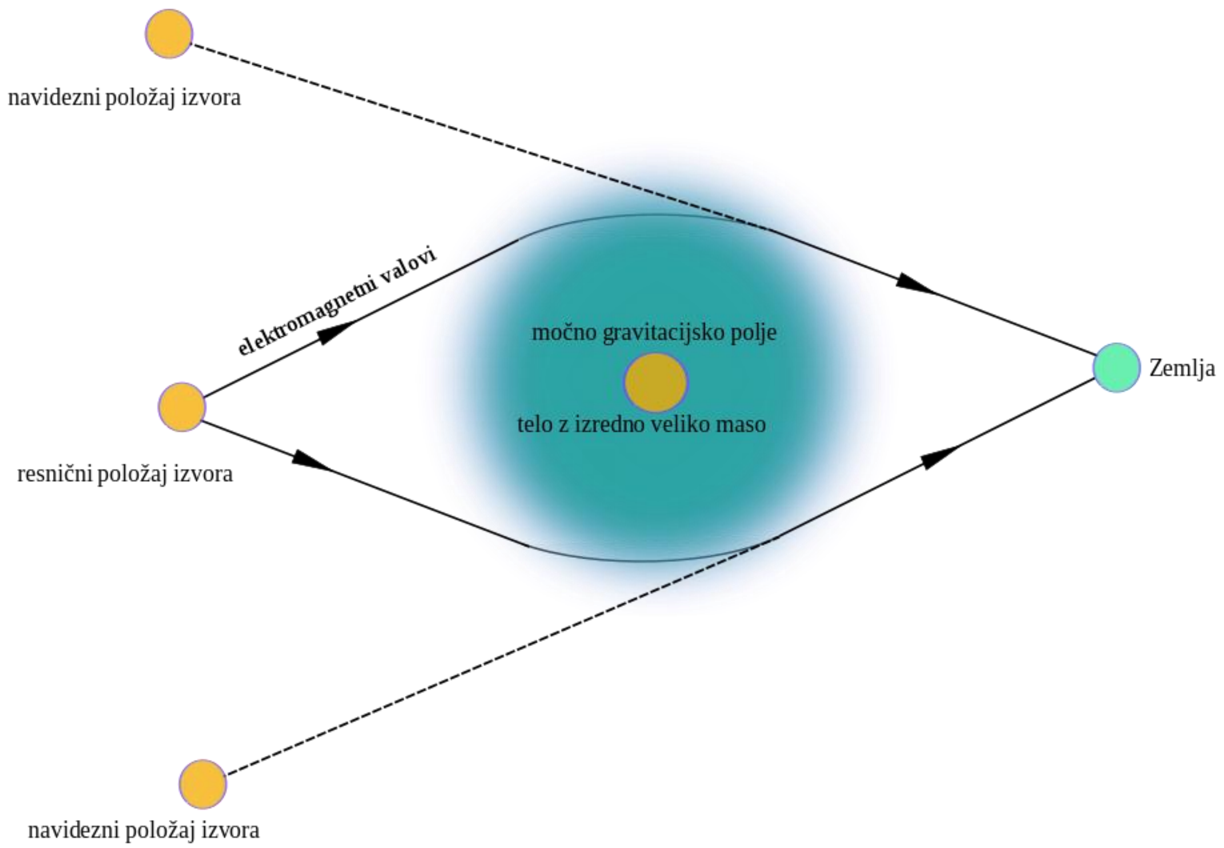
Iz slike sledi, da je razdalja od središča Sonca pa do žarka kar $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, za hitrost v pa velja v = dr/dt. Ker so odkloni svetlobe, ki potujejo zelo blizu Sonca, zelo majhni (jih je zato tudi težko meriti), bo vsota prispevkov (dy), pravokotno na smer žarka, kar polmer Sonca R. Iz enačbe $\alpha = \int(dx/c)(dv/dy)$ razberemo, da bomo najprej odvajali hitrost: dv/dy.
Velja:
$dv/dy = d(c(1 - 2GM/(c^2r)))/dx = 2GMy/(cr^3) = 2GMy/(c(x^2 + y^2)^{3/2})$,
za y vstavimo kar R (saj je uklon zelo majhen). Odvod sedaj vstavimo v enačbo za kot odklona $\alpha = \int(dx/c)(dv/dy)$ in dobimo:

$$\boldsymbol{\alpha = \int(dx/c)(dv/dy) = (2GMR/c^2)\int dx/(x^2 + R^2)^{3/2} = (2GMR/c^2)\int dx/(x^2 + R^2)^{3/2} = (2GM/(Rc^2))x/(x^2 + R^2)^{1/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 4GM/(c^2R) = 1.7\,''}$$

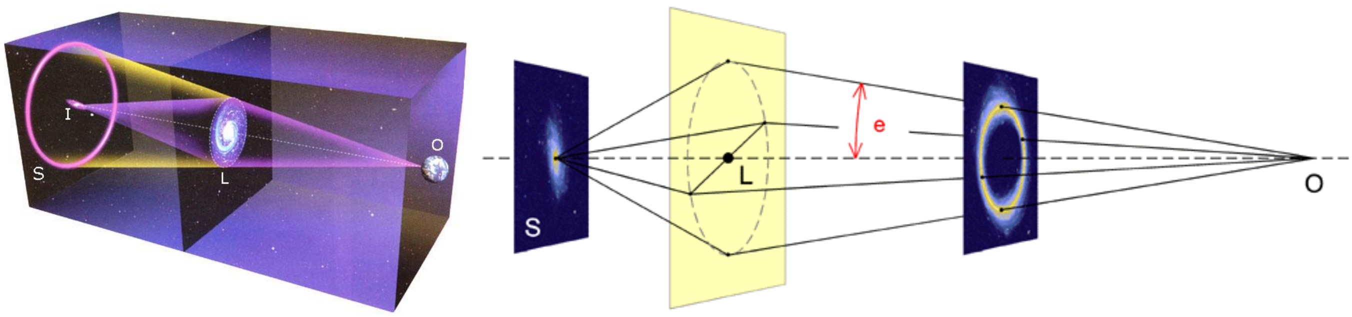
Po integriranju in vstavljanju mej $(-\infty, \infty)$ pridemo do izraza za odklon svetlobe $\alpha = 4GM/(c^2R)$, ki je za Sonce v okviru natančnosti pravilen. Če pa nam je limita izraza $(x/(x^2 + R^2)^{1/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 2)$ tuja, pa lahko brez težav prepoznamo v izrazu $x/(x^2 + R^2)^{1/2} = x/r$ kotno funkcijo $\sin\vartheta$ v mejah od minus 90 ° do plus 90 ° $(-\pi/2, \pi/2)$. Ta izraz pa seveda spet da enak rezultat (2), saj velja: $\sin(-\pi/2) - \sin(\pi/2) = 1 - (-1) = 2$. Einsteinov račun iz leta 1911 je bil za polovico prekratek, leta 1916 pa je že dopolnil splošno teorijo relativnosti in izpeljal korekten izračun - le da (baje) ni izhajal iz Schwarzschildove metrike, ampak iz metrike Minkowskega za šibko gravitacijsko polje, kjer je privzel da je dr' = dr$(1 + 2GM/(c^2r))^{1/2}$. Končni rezultat je seveda enak kot pri Schwarzschildovi metriki, ki jo je takrat tudi že poznal.

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$$

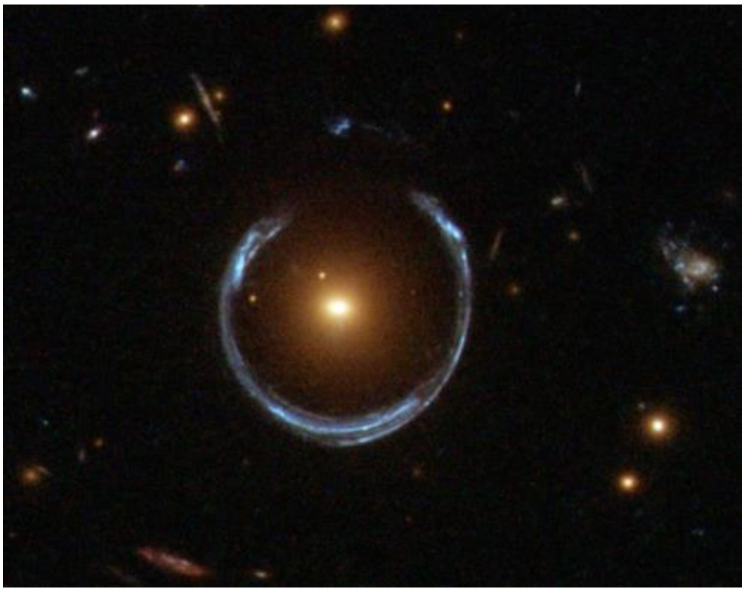




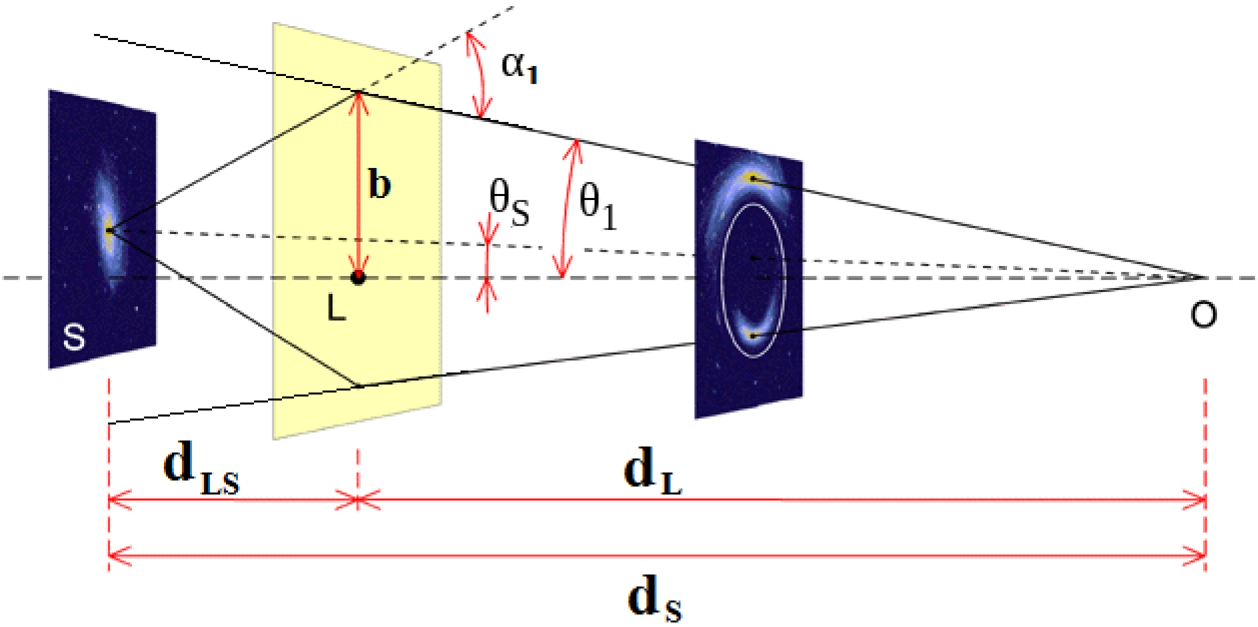
Einsteinov radij gravitacijske leče

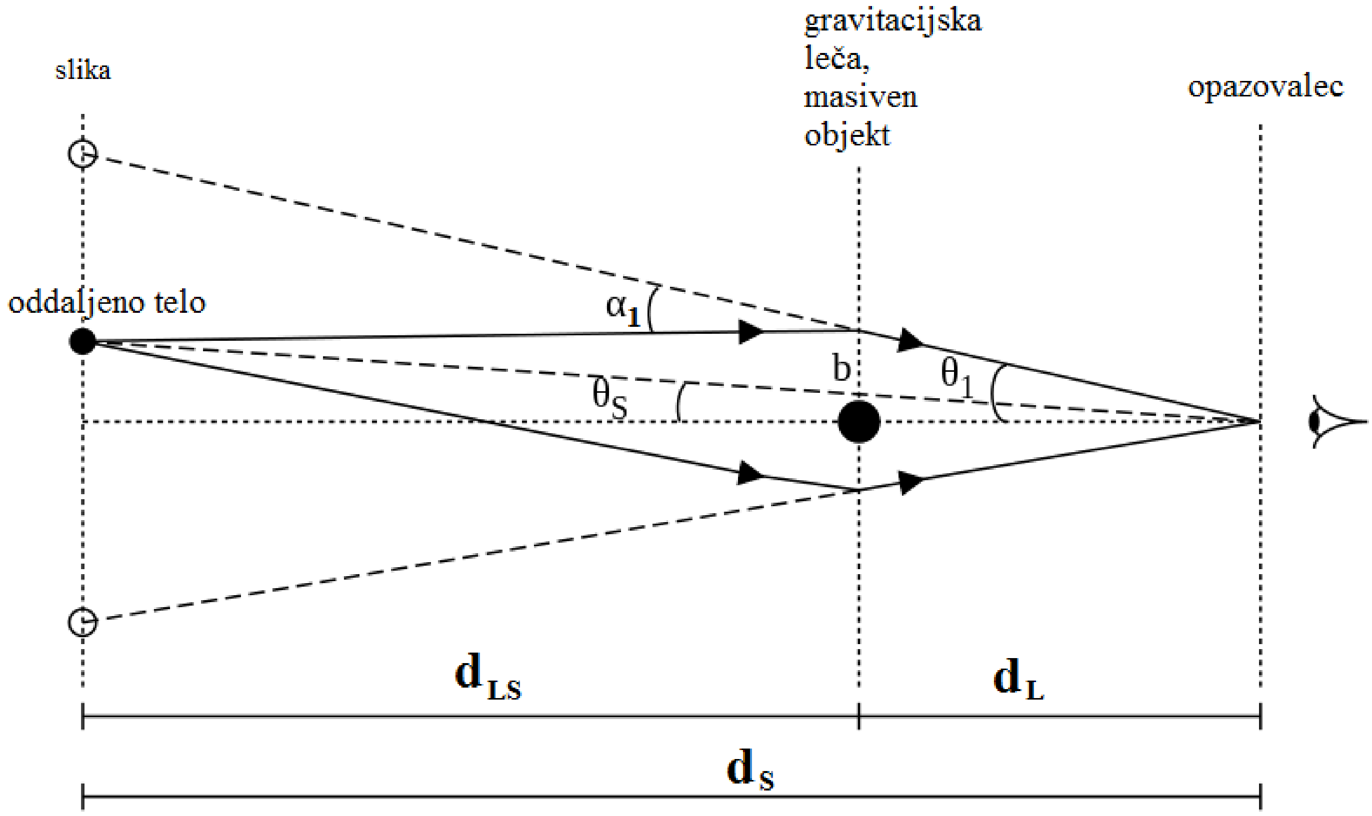


Odklon svetlobnih žarkov v gravitacijskem polju so napovedovali že pred Einsteinom. Masiven objekt kot leča (recimo galaksija), ki je poravnan z opazovalcem in izvorom, povzroči raznolike slikovne efekte: velike svetleče loke galaksij, Einsteinove obroče, večkratne slike kvazarjev. Manj masivne leče (objekti) in slabše poravnave tvorijo komaj zaznavna popačenja (lečenja). Oglejmo si, kako je Einstein definiral radij leče, ki tvori »Einsteinove« obroče.



Although LRG 3-757 was discovered in 2007 in data from the Sloan Digital Sky Survey (SDSS), the image shown above is a follow-up observation taken with the Hubble Space Telescope's Wide Field Camera 3.



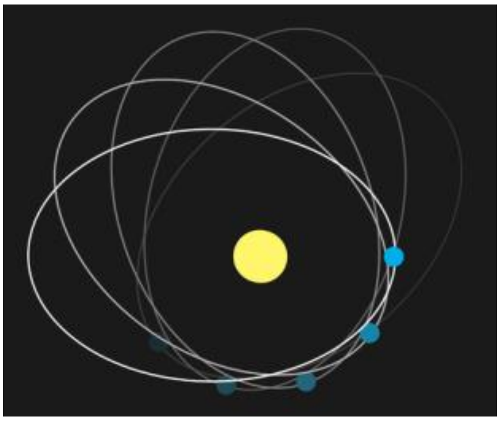
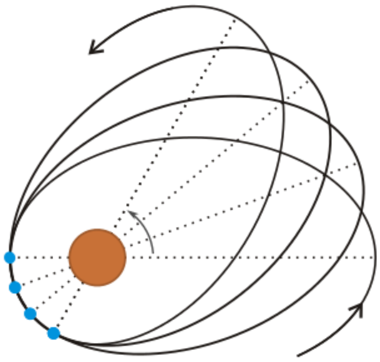
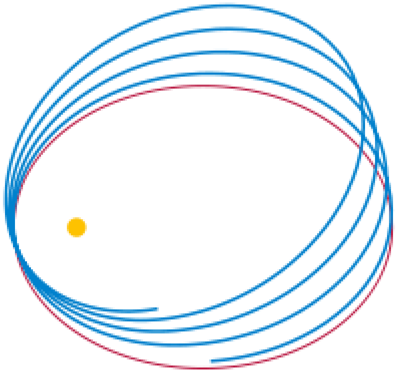


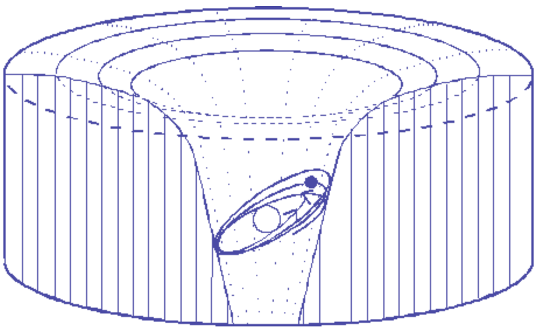
Iz zgornje geometrijske sheme lahko razberemo princip tvorbe slike gravitacijske leče (leča je lahko masivna galaksija, zvezda, ...). Kot osnovo privzamemo že izpeljan izraz za odklon žarkov tik ob zvezdi. Odklona žarka iz smeri je: $\alpha = 4GM/(c^2R)$.
Sedaj pa zapišimo povezave med razdaljo ds opazovalca in preslikanega objekta, razdaljo dl med opazovalcem in lečo, razdaljo dls med lečo in sliko, ter odklonskim kotom in poravnavo med objekti ($\alpha 1$, $\theta 1$, θs) ter b1 efektivno dimenzijo (recimo minimalno polmerom objekta, ki leči) leče $b = b1$. Velja:

$b_1 = \theta_1\, d_\mathrm{L}$	$\theta_1\, d_\mathrm{S} = \theta_\mathrm{S}\, d_\mathrm{S} + \alpha_1\, d_\mathrm{LS}$
$\alpha_1 = \frac{4G}{c^2}\frac{M}{b_1}$	$\alpha_1(\theta_1) = \frac{4G}{c^2}\frac{M}{\theta_1}\frac{1}{d_\mathrm{L}}$
$\alpha_1(\theta_1) = \frac{d_\mathrm{S}}{d_\mathrm{LS}}(\theta_1 - \theta_\mathrm{S})$	$\theta_1 - \theta_\mathrm{S} = \frac{4G}{c^2}\,\frac{M}{\theta_1}\,\frac{d_\mathrm{LS}}{d_\mathrm{S} d_\mathrm{L}}$
Če je izvir točno za lečo, je kot $\theta_\mathrm{S} = 0$, tako dobimo povezavo za poseben kot odklona, ki ga imenujemo Einsteinov radij: $\theta_E = \left(\frac{4GM}{c^2}\,\frac{d_\mathrm{LS}}{d_\mathrm{L} d_\mathrm{S}}\right)^{1/2}$	Drugače pa velja za odklon θ_1 splošna enačba: $\theta_1 = \theta_\mathrm{S} + \frac{\theta_E^2}{\theta_1}$
$\theta_2\, d_\mathrm{S} = -\,\theta_\mathrm{S}\, d_\mathrm{S} + \alpha_2\, d_\mathrm{LS}$ $\theta_2 + \theta_\mathrm{S} = \frac{4G}{c^2}\,\frac{M}{\theta_2}\,\frac{d_\mathrm{LS}}{d_\mathrm{S} d_\mathrm{L}}$	Za spodnji kot θ_2 pa velja: $\theta_2 = -\,\theta_\mathrm{S} + \frac{\theta_E^2}{\theta_2}$

	Sami izpeljite!
Velikokrat se Einsteinov radij izraža v masah Sonca M$_\odot$ in razdalja v Gigaparsecih (GPC). Najbolj značilen Einsteinov polmer je, če je leča pol poti med virom in opazovalcem.	$\theta_E = \left(\frac{M}{10^{11.09} M_\odot}\right)^{1/2} \left(\frac{d_L d_S / d_{LS}}{\mathrm{Gpc}}\right)^{-1/2} \mathrm{arcsec}$

Precesijo Merkurjevega perihelija (prisončja)



Le Verrier je leta 1847 odkril da se prisončje eliptičnega tira Merkurja precesijsko suče v večji meri, kot je predvidel Newtonov splošni gravitacijski zakon. Pojav je sicer uspešno teoretično pojasnila šele Einsteinova splošna teorija relativnosti v letu 1916.

Dopolnjena klasična razlaga pravi, da se perihelij suče, ker sta prečno in radialno gibanje povezani, in ker je hitrost spremembe gravitacijskega polja končna – enaka hitrosti svetlobe. Merkurjev zasuk perihelija je sicer samo 43''/stoletje, kar se dokaj dobro skladala z Einsteinovim izračunom. Je pa gibanje planetov precej zapleteno, zadaj je tudi efekt vrtenja Sonca, ki je zato sploščeno in moramo upoštevati še dodatni člen masnega kvadrupolnega momenta v gravitacijskem potencialu (prispevek je zelo majhen – okrog 0.025''/stoletje). Mi bomo izvedli eno krajših (približnih) izpeljav, le delno bomo upoštevali Schwarzschildovo metriko.

Zasuk glavne osi Merkurja (precesija perihelija) je bil prvi preizkusni kamen nove slike sveta, ki se imenuje splošna teorija relativnosti – in nadgradnja Newtonove mehanike je uspešno prestala prvi test in zaenkrat tudi vse ostale (ukrivitev svetlobe pod vplivom gravitacije - gravitacijsko lečenje, gravitacijski rdeči premik svetlobe – elektromagnetnega valovanja, brez nove slike sveta tudi GPS sateliti ne bi delovali, itn).

Pred Einsteinovim izračunom (razlago) so večinoma trdili, da je teh 43" zasuka perihelija na 100 let posledica vpliva še neodkritega planeta (Le Verrier je leta 1845 je trdil, da je med Merkurjem in Soncem še neodkrit planet - imenoval ga je Vulkan), itn. Večji del precesije (zasuka) glavne osi tirnice Merkurja pa povzročajo motnje ostalih planetov (532"/stoletje). Enak efekt se opazi tudi pri nekaterih ostalih planetih, a najizraziteje pri Merkurju, ki ima izrazito ekscentrično orbito in je Soncu najbližji planet.

Najprej si oglejmo, kako vidi kroženje nekega telesa (recimo planeta) okrog Sonca opazovalec na krožečem telesu (S') in opazovalec (S), ki je zelo daleč vstran in praktično lahko zanemari gravitacijo. Najprej poglejmo katera metrika nam bo tokrat prišla prav – seveda spet Schwarzschildova metrika – saj imamo opraviti s krogelno simetričnim telesom – s Soncem z maso M, okrog katerega na razdalji r od središča kroži lahko telo (glede na Sonce) z maso m.

$dS'^2 = -c^2dt^2(1 - 2GM/(c^2r)) + dr^2/(1 - 2GM/(c^2r)) + r^2d\Omega^2$

Najprej se vprašajmo po času obhoda t' in t v obeh sistemih. Ker je izraz $2GM/(c^2r)$ zelo majhen (za Merkur približno 10^{-7}), bomo uporabili kot dober približek razvoj korena $(1-x)^{1/2}$ v vrsto: $(1-x)^{1/2} = 1 – x/2 + x^2/8 \ldots \approx 1 – x/2$ in za izraz $1/(1-x)^{1/2}$ bomo uporabili podobno logiko: $1/(1-x)^{1/2} \approx 1 + x/2$, višji členi so namreč večinoma izven dosega merilne natančnosti. Seveda je vse odvisno od centralne mase, razdalje med telesi, hitrosti. Najprej zapišimo poenostavljene člene, naj bo $N = GM/c^2$:
$(1 - 2GM/(c^2r))^{1/2} = 1 - GM/(c^2r) = 1 - N/r$
$1/(1 - 2GM/(c^2r))^{½} = 1 + GM/(c^2r) = 1 + N/r$
Pa še – iz Newtonovega zakona o kroženju telesa m okrog centralne mase M na razdalji r velja:
$m(r\omega)^2/r = GmM/r^2$ iz česar sledi $v_t{}^2 = GM/r$ ali $v_t{}^2/c^2 = GM/(rc^2) = N/r$

Zapišimo Schwarzschildovo metriko in izpostavimo člen $(-c^2dt^2)$:
$-c^2dt'^2 = -c^2dt^2(1 - 2GM/(c^2r)) + dr^2/(1 - 2GM/(c^2r)) + r^2d\Omega^2$
$dt' = dt\,(1 - 2GM/(c^2r) - (dr^2/dt^2)/(c^2(1 - 2GM/(c^2r))) - r^2d\Omega^2/(dt^2c^2))^{½}$
$dt' = dt\,(1 - 2GM/(c^2r) - v_r{}^2/(c^2(1 - 2GM/(c^2r))) - v_t{}^2/c^2)^{1/2}$
$v_r = dr/dt$ – radialna hitrost

$v_t = rd\Omega/dt = r\omega = (GM/r)^{1/2}$ - je tangentna (obodna) hitrost, recimo pri kroženju telesa okrog Sonca
$dt' = dt\,(1 - 2GM/(c^2r) – (v_r/c)^2/(1 - 2GM/(c^2r)) - GM/(rc^2))^{½}$

Za $2GM/c^2$ vstavimo $N = GM/c^2$.
$dt' = dt\,(1 - 3N/r – (v_r/c)^2/(1 – 2N/r))^{½}$

Sedaj uporabimo enačbi za poenostavitev zapisa $(1-x)^{1/2} \approx 1 – x/2$ in $1/(1-x)^{1/2} \approx 1 + x/2$.
$dt' = dt\,(1 - 3N/r – (v_r/c)^2(1 + 2N/r))^{½} = dt(1 - 3N/(2r) – (v_r/c)^2(1 + N/r))$

$$\mathbf{dt' = dt(1 - 3N/(2r) – (v_r/c)^2(1 + N/r)) = dt(1 - 3GM/(2c^2r) – (v_r/c)^2(1 + GM/(c^2r)))}$$

Pri kroženju je radialna komponenta hitrosti nič: $\mathbf{v_r = 0}$. Od tod sledi povezava med iskanim časom na krožečem telesu t' in oddaljenim opazovalcem, ki izmeri čas t (izraz recimo integriramo od 0 do enega obhoda t oz. t'):

$$\mathbf{t' = t(1 - 3N/(2r)) = t(1 - 3GM/(2c^2r))}$$
$$\mathbf{t = t'/(1 - 3GM/(2c^2r)) \approx t'(1 + 3GM/(2c^2r))}$$

Po pričakovanjih čas t' na planetu teče počasneje, kot čas t na oddaljeni lokaciji, razlog je gravitacija. Razlika med časoma je: $t-t' = 3t'GM/(2c^2r)$.

Za Zemljo je v enem letu (365.25*24*3600 s) razlika v obeh časih:
$\mathbf{3t'GM/(2c^2r) = 0.465\ s.}$

Če pogledamo zgolj gibanje planeta okrog Sonca (privzeli smo kroženje), bi lahko trdili, da bi ure na Zemlji morale kazati čas $t_v' = t(1-(v_r/c)^2)^{1/2} = t(1 - GM/(2c^2r))$. A ker planet potuje po gravitacijskem polju, ukrivljenem prostoru po Einsteinu, moramo upoštevati še zamik časa zaradi gravitacije, ki je za mirujočo telo $t_g' = t(1 - 2GM/(c^2r))^{½} = t(1 - GM/(c^2r))$. Sedaj razmišljamo malo v sliki splošne in malo v sliki posebne teorije relativnosti. Poglejmo, kaj dobimo, če upoštevamo oba zamika časov: $tGM/(2c^2r) + tGM/(c^2r) = 3tGM/(2c^2r)$. Dobimo enak rezultata v zamiku časa, kot direktno preko Schwarzschildove metrike. Torej, če so hitrosti relativno majhne in polmeri dovolj veliki (velja za vse planete), se da računati s kombinacijo splošne in posebne teorije relativnosti – a previdno. Kmalu bomo tudi upoštevali, da gibanja planetov niso krožna, ampak eliptična.

A še prej preverimo rezultat za hitrost preko enačbe, da je hitrost kroženja enaka odvodu loka po času: $v_t' = dl'/dt'$.
Za lok dl' bomo uporabili enačbo posebne teorije relativnosti (enakomerno kroženje, naredili smo prekršek, a v končnem učinku ne), za dt' pa bomo uporabili enačbo iz splošne teorije, ker je telo v gravitacijskem polju Sonca. Velja: $dl' = dl/(1-(v_r/c)^2)^{1/2} = dl(1 + GM/(2c^2r))$ in dt' =d

$t(1 - 2GM/(c^2r))^{½} = dt(1 - GM/(c^2r))$. Za del loka dl velja: $dl = rd\vartheta$, za hitrost, ki jo vidi opazovalec od daleč pa velja: $v_t = dl/dt = rd\vartheta/dt = r\omega$. Zapišimo se hitrost ($v_t' = dl'/dt'$), ki jo izmeri opazovalec na planetu, velja:

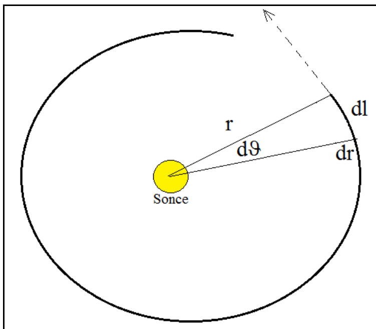
$v_t' = dl'/dt' = (rd\vartheta/dt)((1 + GM/(2c^2r))/ (1 - GM/(c^2r))) = r\omega((1 + GM/(2c^2r))(1 + GM/(c^2r)))$
$= r\omega(1 + 3GM/(2c^2r) + \textit{višji členi}) \approx r\omega(1+3GM/(2c^2r))$

Višje člene smo spet upravičeno zanemarili in dobili pričakovani rezultat. Hitrost, ki jo izmeri opazovalec na planetu je za faktor $v_t3GM/(2c^2r)$ večja od v_t'. Dolžina v lastnem koordinatnem sistemu je najdaljša, čas pa najkrajši. Če računamo hitrost s časom in obsegom, bi morali dobiti enak rezultat: $v_t' = (2\pi r/t)(1 - 3GM/(2c^2r)) \approx (2\pi r/t)(1 + 3GM/(2c^2r)) = \omega r(1 + 3GM/(2c^2r))$. Zapišimo še izraz z zamikom kota: $v_t' = (r/t)(2\pi + 3\pi GM/(c^2r))$.

Kako interpretirati ta kot $3\pi GM/(c^2r)$ po enem obratu? Opazovalec od daleč izmeri, da se je en obhod sklenil, ko je telo naredilo še dodaten kot $3\pi GM/(c^2r)$ napram začetni legi. Preprosta razlaga bi bila, da je tak rezultat posledica skrčenja dolžin. Ali to lahko kako opazimo, pri kroženju težko, pri gibanju po elipsi pa lažje – saj bi pričakovali rotacijo glavne osi elipse. To se dejansko opazi, a moramo biti previdni, sklenitev krivulje še ni nujno enako rotaciji osi. Upoštevali bomo drugi Keplerjev zakon, da se ploščinska hitrost planeta ohranja (zadaj je postulat o ohranitvi vrtilne količine).

Preden se lotimo gibanja po elipsi, pa se vprašajmo, kaj bi se zgodilo, če bi nam kdo v trenutku ukradel Sonce (pojem »trenutno«, je v naravi praktično nemogoče uveljaviti – zato bo to miselni eksperiment)?

Ker nič v naravi ne more potovati hitreje od svetlobe, se tudi ta manko Sonca ne bi takoj čutil pri gibanju Zemlje, ampak bi Zemlja še potovala okrog navideznega Sonca dobrih 8 minut (toliko časa t = c/r približno potuje svetloba in gravitacijski manjko od Sonca do Zemlje). Po tem času pa bi Zemlja tangentno na pot (približno na krožnico, pot je v resnici elipsa) odfrčala v vesolje ...

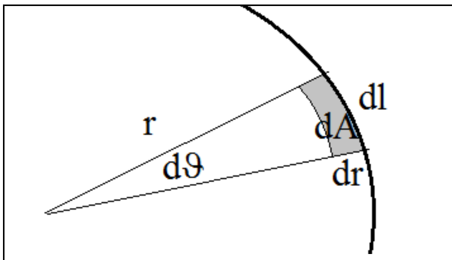
	$t' = c/r = 1.5\ 10^{11}$ m/ $3\ 10^8$ m/s = 500 s = 8.33 min Kot za katerega se zasuče Zemlja je: $\Delta\vartheta' = \omega * t' = (2\pi/t_o)t' = (2\pi/(365.25*24*3600s))*500s = 0.0000996$ rad $\Delta\vartheta' = 0.0000996*(180*3600/\pi) = 20.5$ "

Torej, če bi nam kdo hipotetično v trenutku izmaknil Sonce, bi še dobrih 8 minut nič ne vedeli, kaj se dogaja in Zemlja bi na svoji poti še naredila lok s kotom 20.5 ".

Tako bi videli dogodek iz Zemlje - nekdo od daleč pa bi videl nekoliko krajši zasuk (skrčenje dolžin):

$\Delta\vartheta = 20.5\,''(1 - 3GM/(2c^2r))$.

Izpeljimo še povezavo za drugi Keplerjev zakon, ki pravi da zveznica med Soncem in planetom opiše v enakih časih enake ploščine. Planet se v bližini Sonca giblje hitreje kot v večji oddaljenosti. Zakon je znan tudi pod imenom izrek o ploščinski hitrosti in velja na splošno za vsa centralna gibanja.

	Oznaka za ploščino naj bo A. Pri klasični sliki velja $dA/dt = dldr/dt = (rdr)d\vartheta/dt$, po integraciji razdalje od 0 do r dobimo rezultat: $dA/dt = (r^2/2)d\vartheta/dt$.

Za kroženje velja, smo že izpeljali (glej sliko):

$dA' = dl'dr = rd\vartheta(1 + GM/(2c^2r))dr$

$dA'/dt' = (rdrd\vartheta/dt)((1 + GM/(2c^2r))/(1 - GM/(c^2r))) \approx {}_0\!\int^r rdrd\vartheta(1+3GM/(2c^2r))/dt$

Integriramo po dr, od 0 do r in dobimo:

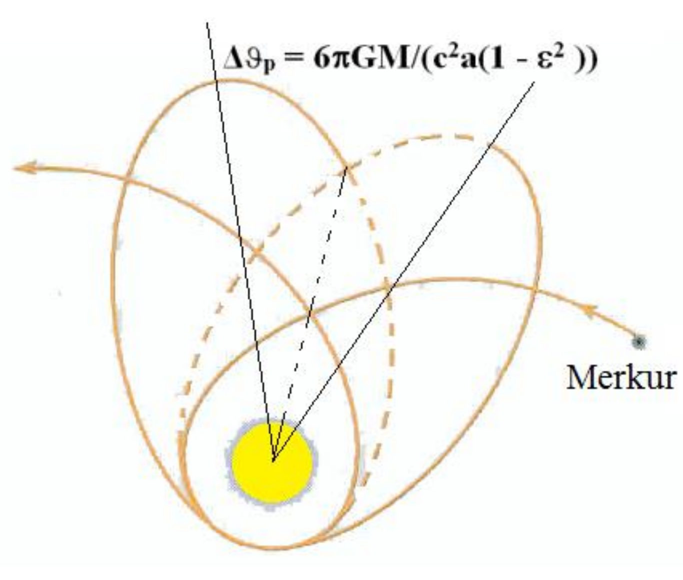
$dA'/dt' = {}_0\!\int^{2\pi} (r^2/2 + 3rGM/(2c^2))d\vartheta/dt = {}_0\!\int^{2\pi} (r^2/2)(1 + 3GM/(rc^2))d\vartheta/dt$

Integriramo še po kotu ϑ od 0 do 2π, za poln obhod ali pa kar zapišimo kotno hitrost $d\vartheta/dt = 2\pi/t$. Tako dobimo:

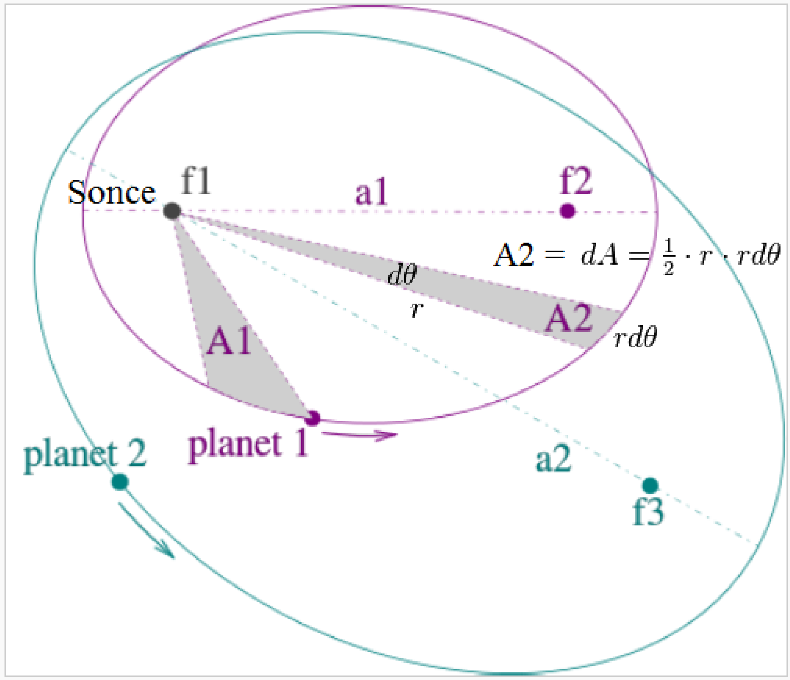
$dA'/dt' = (r^2/2)(1 + 3GM/(rc^2))2\pi/t = (r^2/2)(2\pi + 6\pi GM/(rc^2))/t$

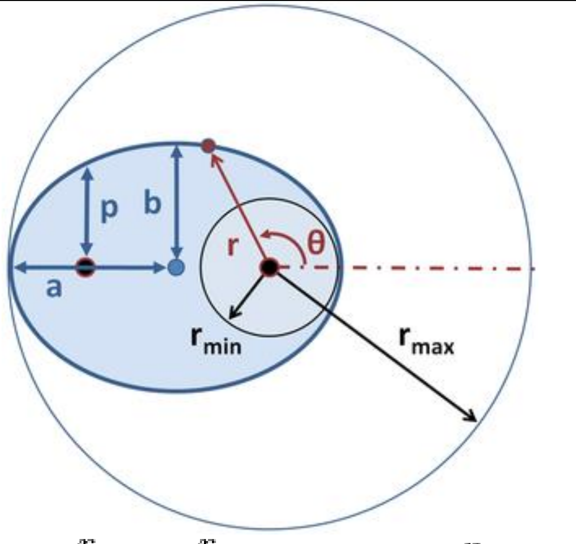
Kako interpretirati rezultat. Izraz $2\pi r^2/2 = \pi r^2$ je seveda ploščina kroga, saj gre za ploščinsko hitrost. Še bolj pa je zanimiv tale zapis v drugem oklepaju: $2\pi + 6\pi GM/(rc^2)$. Opazovalec od daleč izmeri, da se je en ploščinski obhod sklenil, ko je telo naredilo še dodaten kot $6\pi GM/(c^2r)$ napram začetni legi pred obhodnim časom t. Če se kroženje konča (račun prej) z dodatnim kotom $3\pi GM/(c^2r)$ pa lahko sklepamo, da se za dodaten kot $3\pi GM/(c^2r)$ premakne glavna os elipse (skupaj $6\pi GM/(rc^2)$) ...

Rezultat se zdi na prvi pogled nekoliko neuporaben – a če bi krožno orbito rahlo spremenili v eliptično ($r \approx a$) bi opazili, da se je dejansko glavna os elipse zarotirala približno za dodaten kot $6\pi GM/(rc^2)$. Izkazalo se bo, da za $6\pi GM/(c^2a(1 - \varepsilon^2))$. Ta efekt je bil pri Merkurju opažen že desetletja pred izpeljavo splošne teorije relativnosti in ravno na tem zasuku (precesiji perihelija) se je teorija dokončno nabrusila in to je bil njen prvi velik uspeh.
Slika seveda kaže pretiran zasuk.



Pa se lotimo realnega gibanja planetov po elipsi in precesije perihelija.
Za uvod si oglejmo enačbe eliptičnega tira planeta in drugi Keplerjev zakon. Podatki, ki so pomembni za matematični opis elipse so: **ε** je ekscentričnost elipse ($\varepsilon = (r_{maks} - r_{min})/(r_{maks} + r_{min})$), **a** je velika polos elipse, b je mala polos elipse, **θ** je kot med zveznico **r**, ki povezuje gorišče elipse s točko na elipsi in veliko polosjo elipse, glejte sliko. Velja: $\mathbf{r = a(1 - \varepsilon^2)/(1 + \varepsilon \cos\theta)}$.





$$\varepsilon = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}. \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos\theta}$$

$$dA = \tfrac{1}{2} \cdot r \cdot rd\theta \qquad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

$$r = a \cdot \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon \cdot \cos\theta}.$$

Zveznica med Soncem in planetom opiše v enakih časih enake ploščine. Planet se v bližini Sonca giblje hitreje kot v večji oddaljenosti. Zakon je znan tudi pod imenom izrek o ploščinski hitrosti in velja na splošno za vsa centralna gibanja.

Še enkrat ponovimo. Po drugem Keplerjevem zakonu velja, da se ploščinska hitrost planeta ohranja (izhaja iz ohranitve vrtilne količine). V klasični sliki velja zapis drugega zakona z enačbo:

$dA/dt = (r^2/2)d\theta/dt$

dA je sprememba ploščine, r je zveznica med Soncem in planetom, dθ je kot zasuka planeta glede na Sonce, dt je čas zasuka planeta. Iz slike se lahko razbere izpeljava ploščinske hitrosti.

Izpeljimo torej pričakovani zasuk Merkurjevega perihelija. Splošna teorija relativnosti napove zasuk perihelija, ker sta prečno in radialno gibanje povezani.

Ker gre spet za (dokaj) sferično simetrično telo (Sonce z maso M in relativno majhen Merkur z maso m), lahko izhajamo iz Schwarzschildove metrike prostora in časa. En sistem dS' naj ima izhodišče na Merkurju, saj se Merkur giblje po elipsi in zato tudi delno radialno – proti in od Sonca. Spreminja se razdalja do Sonca in zato tudi gravitacija, a ta sprememba gravitacije potuje s končno – svetlobno - hitrostjo in to lahko po klasični mehaniki interpretiramo kot prispevek k precesiji v smeri gibanja Merkurja, saj sta prečno in radialno gibanje povezani. Ker je pri večjih hitrostih zakasnitev spremembe gravitacije opazna, se (tako kot pri miselnem eksperimentu hipnega manjka Sonca), telo nekoliko bolj premakne v smeri gibanja, kot bi pričakovali, če bi sprememba gravitacije bila hipna. Čeprav se pri gibanju po elipsi spreminja razdalja r (od Sonca v gorišču) – bomo za dr' komponento Schwarzschildove metrike privzeli kar dr – ker je radialna hitrost v_r = dr/dt za planete še zmeraj zelo majhna v primerjavi s svetlobno. V tem sistemu teče lasten čas t'. Velja torej metrika:

$dS'^2 = -c^2dt'^2 + dr'^2 + r^2d\Omega^2$

Lokalno komponento dt'^2 zamenjamo z zdaj že domačo transformacijo $dt^2(1 - 2GM/(c^2r))$, lokalno radialno komponento dr'^2 pa z $dr^2/(1 - 2GM/(c^2r))$, tako dobimo že znan Schwarzschildov izraz.

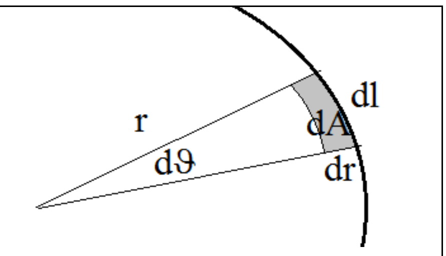
$dS'^2 = -c^2dt^2(1 - 2GM/(c^2r)) + dr^2/(1 - 2GM/(c^2r)) + r^2d\Omega^2$

Za rešitev zasuka kota precesije perihelija Merkurja si bomo pomagali s Keplerjevo enačbo o ohranitvi ploščinske hitrosti dA'/dt', za čas dt' bomo privzeli transformacijo $dt(1 - 2GM/(c^2r))^{1/2} \approx (1 - GM/(c^2r))dt$. Za radialno spremembo bomo privzeli, da sta dr' in dr zelo blizu skupaj – tirnice planetov namreč niso zelo sploščene in je zato radialna hitrost zanemarljiva v primerjavi s hitrostjo svetlobe c.

Tako bomo v bistvu ponovili račun krožne orbite, a na koncu bomo upoštevali enačbo elipse [$r = a(1 - \varepsilon^2)/(1 + \varepsilon \cos\vartheta)$] za razdaljo do Sonca, privzamemo da je dr' = dr. Velja:

$dA' = dl'dr = rd\vartheta(1 + GM/(2c^2r))dr$

$dt' = dt(1 - 2GM/(c^2r))^{1/2} \approx (1 - GM/(c^2r))dt$



$dA'/dt' = (rdrd\vartheta/dt)((1 + GM/(2c^2r))/(1 - GM/(c^2r))) \approx {}_0\int^r rdrd\vartheta(1+3GM/(2c^2r))/dt$

Integriramo po dr, od 0 do r in dobimo:

$dA'/dt' = (r^2/2 +3rGM/(2c^2))d\vartheta/dt = (r^2/2)(1 + 3GM/(rc^2))d\vartheta/dt$

Predvsem nas zanima člen $(1 + 3GM/(rc^2))d\vartheta$, ki da zasuk osi elipse. V izrazu je tudi člen $1/r$. Namesto r vstavimo enačbo elipse: $r = a(1 - \varepsilon^2)/(1 + \varepsilon \cos\vartheta)$. Tako dobimo:

$(1 + 3GM/(c^2R))d\vartheta = (1 + (1 + \varepsilon \cos\theta)3GM/(c^2a(1 - \varepsilon^2)))d\vartheta$, enačbo preoblikujemo in integriramo od 0 do 2π:

$$\Delta\vartheta = {}_0\int^{2\pi} (d\vartheta + 3GMd\vartheta/(c^2a(1 - \varepsilon^2)) + 3GM\varepsilon \cos\vartheta d\vartheta/(c^2a(1 - \varepsilon^2)))$$

$$\Delta\vartheta = {}_0\int^{2\pi} d\vartheta + 3GM{}_0\int^{2\pi}d\vartheta/(c^2a(1 - \varepsilon^2)) + 3GM\varepsilon\, {}_0\int^{2\pi}\cos\vartheta d\vartheta/(c^2a(1 - \varepsilon^2))$$

Poglejmo vse tri integrale:

${}_0\int^{2\pi}\cos\vartheta d\vartheta = \sin2\pi - \sin0 = 0$ (zadnji člen je torej 0)

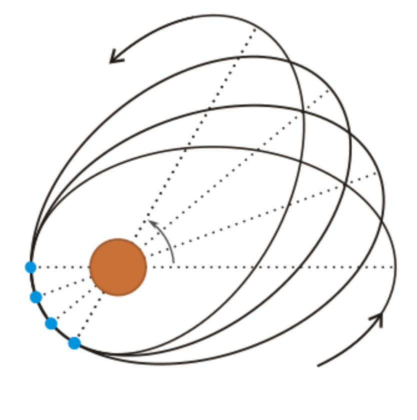
$3GM{}_0\int^{2\pi}d\vartheta/(c^2a(1 - \varepsilon^2)) = 6\pi GM/(c^2a(1 - \varepsilon^2)) – 0 = 6\pi GM/(c^2a(1 - \varepsilon^2))$

${}_0\int^{2\pi} d\vartheta = 2\pi - 0 = 2\pi$

$$\Delta\vartheta = 2\pi + 6\pi GM/(c^2a(1 - \varepsilon^2)) = 2\pi + \Delta\vartheta_p$$

Prvi člen 2π predstavlja klasični obhod planeta okrog Sonca (obhodni čas Merkurja je t_m = 87.9691 dni), drugi člen pa je tisti, ki pomeni po enem obhodu zasuk glavne osi (perihelija) Merkurja in znaša:

$$\boldsymbol{\Delta\vartheta_p = 6\pi GM/(c^2a(1 - \varepsilon^2))}$$



To je eden največjih uspehov splošne teorije relativnosti. V našem računu smo zanemarili maso Merkurja. Masa Sonca M = 1,989 10^{30} kg, ekscentričnost Merkurja je ε = 0.205630, velika polos Merkurjeve orbite a = 57.909 10^9 m, hitrost svetlobe c = 299792458*10^8 m/s, G = 6.6726*10^{-11} $m^3s^{-2}kg^{-1}$, obhodni čas Merkurja okrog Sonca je t_m = 87.9691 dni. V 100 letih se Merkur zasuka okrog Sonca približno 415 krat.

Vrednost zasuka perihelija v sto letih je 43" (43 ločnih sekund):

$\boldsymbol{\Delta\vartheta_{p100} = 100*360*3600''*6\pi GM/((c^2a(1 - \varepsilon^2))t_m2\pi) = 43''}$

Za Zemljo je zasuk perihelija 3.84", za Venero pa 8.62", ta dva relativistična prispevka lahko izračunate sami.

Še zanimivost - Paul Gerber je leta 1898 izpeljal enako enačbo:

$\Delta\vartheta_p = 6\pi GM/(c^2 a(1 - \varepsilon^2))$),

- privzel je, da je hitrost gravitacijske sprememba praktično skoraj enaka svetlobni. A njegovo izpeljavo mnogi štejejo kot nedosledno. Njegovi kritiki pravijo, da je Gerber neskladen s splošno teorijo relativnosti – tudi z lastnimi predpostavkami, in da je zato napačno privzel, da Sonce miruje. A vseeno je bil njegov napor kamenček v mozaiku do končne rešitve problema gravitacije in časa – splošne teorije relativnosti. Napovedal je odklon žarka ob Soncu, a za faktor 3/2 prvec. No zmotil se je manj kot nekateri pred in po njem.

Različica danes izpodrinjenih teorij je bila torej tudi Gerberjeva, ki jo razvil med letoma 1898 in 1902. Predpostavil je končno hitrost gravitacije c_g in za gravitacijski potencial dobil zvezo:

$$V = \frac{\mu}{r\left(1 - \frac{1}{c_g}\frac{dr}{dt}\right)^2}.$$

Po binomskem izreku do drugega reda sledi:

$$V = \frac{\mu}{r}\left[1 + \frac{2}{c_g}\frac{dr}{dt} + \frac{3}{c_g^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Po Gerberju je zveza med hitrostjo gravitacije c_g in zasukom Merkurjevega prisončja Ψ:

$$c_g^2 = \frac{6\pi\mu}{a(1-\epsilon^2)\Psi},$$

kjer je:

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2}$$, in tukaj je ϵ izsrednost tira, a velika polos, τ obhodna doba.

S podatki za Merkur je izračunal hitrost gravitacije 305500 km/s, kar je skoraj enako svetlobni.

Gerberjeva enačba da za zasuk Merkurjevega prisončja:

$$\Psi = \frac{24\pi^3 a^2}{\tau^2(1-\epsilon^2)c_g^2}.$$

Ernst Gehrcke je leta 1916 omenil, da je matematično enaka Einsteinovi zvezi iz splošne teorije relativnosti, ki jo je Einstein izpeljal leta 1915.

$$\delta = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2(1-e^2)c^2} = \frac{6\pi\kappa m_\odot}{a(1-e^2)c^2},$$

kjer je e izsrednost (ekscentričnost) tira, a glavna polos, T obhodna doba, c hitrost gravitacije, enaka svetlobni, κ gravitacijska konstanta, $m_\odot$ Sončeva masa.

Einstein je leta 1920 zapisal: » ... *even if I had been aware of it, I would not have had any reason to mention it. (...ich hätte aber auch keinen Anlaß gehabt, sie zu erwähnen, wenn ich von ihr Kenntnis gehabt hätte.*)«. Einstein torej trdi, da ni bil seznanjen z Gerberjevo izpeljavo, a tudi če bi bil, ni imel nobenega razloga, da bi ga (Gerberja) omenil.

Zagotovo pa je Gerber prvi na svetu rezultatsko pravilno povezal gravitacijo in osnovne naravne konstante v oceni precesije Merkurjevega perihelija – in to je bila kvečjemu pomoč

vsem njegovim naslednikom in ne obratno (tudi če teoretično danes njegova pot ni več verodostojna). Če bi bili enako strogi do vseh ostalih znanstvenikov kot smo do Gerberja, bi morali zamolčati tako Keplerja kot Newtona ..., no Hooku se je to delno tudi zgodilo (Hooke poda pravilno odvisnost gravitacije od razdalje $1/R^2$).
Potrebno se je spomniti še na gospoda, ki je prvi pravilno napovedal polmer črne luknje (takrat črne zvezde) - to je bil John Michell leta 1783 (predpostavka je bila, da svetlobo sestavljajo delci – danes vemo, da se svetloba obnaša kot valovanje in hkrati ima lastnosti delcev, ki jim pravimo kvanti (fotoni), so brez mase z energijo $E = h\nu$ – Planckova konstanta krat frekvenca). Danes temu polmeru pravimo Schwarzschildov polmer dogodkovnega obzorja črne luknje ($R = 2GM/c^2$).

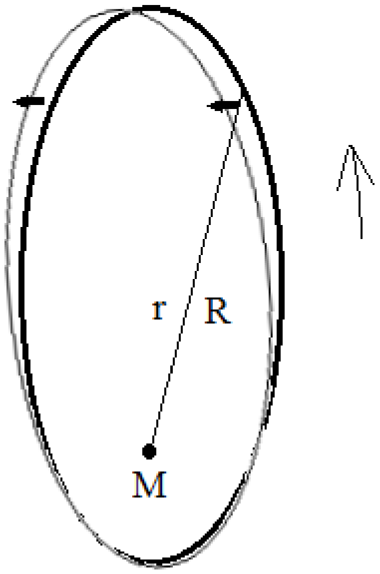
V resnici se zasuk perihelija poda z bolj natančnimi izrazi (mi smo recimo zanemarili relativistični prispevek radialne hitrosti) - ena bolj natančnih enačb, je:

$$\delta = \frac{1}{3}(2 - \beta + 2\gamma)\frac{6\pi\kappa m_S}{ac^2(1-\epsilon^2)},$$

- kjer je $\beta = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2} v_r/c$ in $\Upsilon = 1 - 2GM/(c^2r)$

Newtonova mehanika trdi, da če se gravitacijski vpliv širi s končno hitrostjo, planeti ob istem času čutijo privlačnost do prejšnje lege Sonca in ne do trenutne lege Sonca. To je povzročalo v preteklosti (19. stoletje) velike težave in mnogi so trdili, da če je temu tako, bi moral biti sončev sistem nestabilen. Po svoje so imeli celo prav, saj danes vemo, da so pri pospešenih gibanjih teles pojavljajo gravitacijski valovi. Danes vemo, da je tudi čas vezan na gravitacijo. Einstein je rešil dilemo tako, da je vpeljal gravitacijsko ukrivljen prostor-čas po katerem potujejo telesa.

Še ena razlaga precesije perihelija se kar veliko omenja. In sicer, da splošna teorija relativnosti uvaja pri dvojnem sistemu dodatno silo, ki privlači delce nekoliko bolj kot Newtonova gravitacija, še posebej pri majhnih radijih. Ta tretja sila povzroča, da eliptična orbita precesira v smeri njenega vrtenja; ta učinek je bila izmerjen pri Merkurju, Veneri in Zemlji.



Klasična razlaga precesije perihelija – ni več v rabi! Ker je pri večjih hitrostih zakasnitev spremembe gravitacije opazna (nezanemarljiva), se telo (tako kot pri miselnem eksperimentu hipnega manjka Sonca) nekoliko bolj premakne v smeri gibanja, kot bi pričakovali, če bi sprememba gravitacije bila hipna. Na sliki bi razdalja R bila veljavna pri hipni spremembi gravitacije, ker pa je hitrost spremembe gravitacije končna, telo na eliptični tirnici ne čuti razdalje R, ampak nekoliko manjšo r in s tem nekoliko večjo silo in s tem pospešek – kar rezultira k spiralnemu gibanju. Pojav vidimo kot zasuk velike osi elipse – temu pojavu rečemo tudi precesija perihelija.

Črna luknja – zvezda z veliko maso

http://predmeti.fmf.uni-lj.si/gravitacija?action=AttachFile&do=get&target=horvat_sem_enacbe_str.pdf

To razdaljo imenujemo Schwarzschildov radij (r_g) . Fenomen singularnosti lahko lepo opazujemo pri telesih, ki so velikosti tega radija oz. skrivajo svojo maso pod tem radijem. V vesolju navadno najdemo telesa, ki so precej večja od njenega r_g :

Zemlja r_g =8.8 mm
Sonce r_g =2,96 km

Telesa, ki pa so velikosti tega radija pa imenujemo črne luknje. Območje z $r = r_g$ imenujemo s tujko »Event horizon«. Precej zanimivo je obnašanje svetlobe na teh območjih. Vprašanje je kam se giba svetloba. Vemo, da se svetloba giba tako, da je $ds^2 = 0$. Če sedaj predpostavimo da se fotoni gibajo le vzdolž radialne koordinate lahko iz metrike izpeljemo izraz za "hitrost" spreminjanja radialne koordinate:

Vidimo, da se fotoni, ki se nahajajo na Schwarzschildovem radiju ne morejo gibati v radialni smeri. Nenavadnost radija r_g pa je tudi v tem, da se s prehodom na območje $r < r_g$, zamenjata vlogi koordinat *dr* in *cdt*. Namreč ob prehodu se v metriki zgodi to, da metrična elementa pred njunima kvadratoma spremenita predznak. To pa ob primerjanju z metriko Minkovskega pomeni, da *dr* prevzame vlogo časa in *cdt* vlogo kraja.

Precesija eliptične orbite

Še enkrat zapišimo Enačbo delca.

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{m^2c^2} - c^2 + \frac{r_s c^2}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2} + \frac{r_s L^2}{m^2r^3}$$

Izraz se lahko zapiše tudi z definicijo Schwarzschildovega radija $r_s = 2GM/c^2$ kot:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left[\frac{E^2}{2mc^2} - \frac{1}{2}mc^2\right] + \frac{GMm}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GML^2}{c^2mr^3}$$

Kaj opazimo pri tej enačbi – polno energijo delca – enačbo, člene dodatno pojasnimo.

Potencialna energija delca V(r) je enaka:

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GML^2}{c^2mr^3}$$

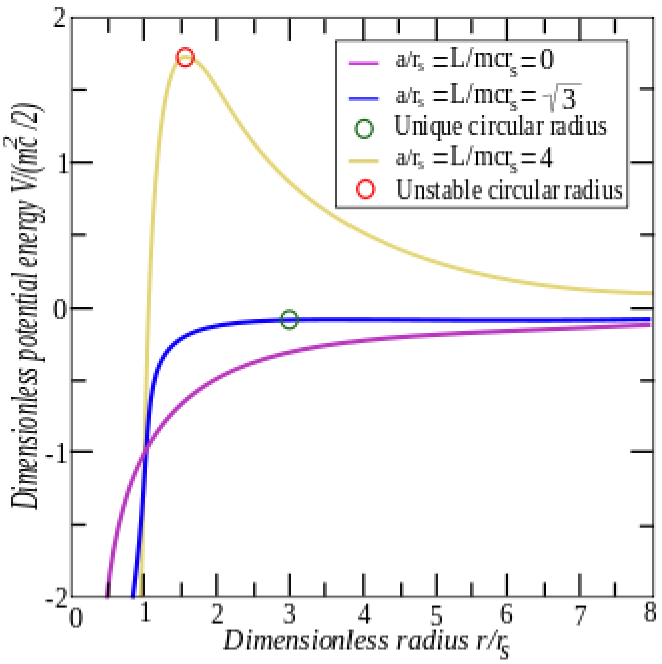
Prvi člen je klasični (-GMm/r) – privlačnost gravitacije da Newtonovo potencialno energijo - drugi člen ($L^2/(2mr^2)$) ustreza potencialu rotacije (»spinu«), tretji izraz (- $GML^2/(c^2mr^3)$) je energija kot »posledica« splošne relativnosti. Kot je razvidno, je to energija (obratno sorazmerna – inverzna – kubu razdalje), ki povzroča precesijo eliptične orbite za kot δφ na obrat (smo že izpeljali – spodnji zapis je zapisan z veliko črko A, da ne bi bilo zamenjave z malim a, ki je pri prejšnji izpeljavi predstavljal novo spremenljivko).

$$\delta\varphi \approx \frac{6\pi GM}{c^2A\left(1-e^2\right)}$$

Kjer je torej A velika polos elipse in e ekscentričnost. Tretji člen dominira le pri orbitah, kjer je vrednost r majhna (blizu centralne mase), pri čemer naj bo r_{in} kritični notranji radij, ko delec privlači nezadržno navznoter do r = 0. Ta notranji polmer je funkcija vrtilne količine delca na enoto mase. Izpeljava zasuka perihelije, tokrat iz Schwarzschildove metrike, še sledi.

Krožne orbite in njihova stabilnost

Efektivna radialna potencialna energija za različne vrtilne količine (kotne momente). Pri majhnem radiju energija strmo pade, zaradi česar delce vleče izrazito navznoter r = 0. Vendar, ko normirana vrtilna količina $a/r_s = L/mcr_s$ doseže vrednost kvadratnega korena iz tri, je metastabilna krožna orbita pri radiju označenim z zelenim krogom. Pri večji vrtilni količini obstaja značilna centrifugalna pregrada (oranžna krivulja) in nestabilen notranji radij, označen z rdečo.



Efektivni potencial V se lahko izrazi tudi z vidika presekov, vrednosti a in b.

$$V(r) = \frac{mc^2}{2}\left[-\frac{r_s}{r} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{r_s a^2}{r^3}\right]$$

Krožna orbita je mogoča, če je dejanska sila na delec nič.

$$F = -\frac{dV}{dr} = -\frac{mc^2}{2r^4}\left[r_s r^2 - 2a^2 r + 3r_s a^2\right] = 0$$

to je, ko sta dve privlačni sili - Newtonov gravitacijski del (prvi člen) in prispevek splošne teorije relativnosti (tretji člen) - uravnoteženi s sistemsko odbojno centrifugalno silo (drugi člen). Obstajata dva maksimuma, kjer je to ravnotežje mogoče, označena kot r_{inner} in r_{outer}.

$$r_{\text{outer}} = \frac{a^2}{r_s}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{3r_s^2}{a^2}}\right)$$

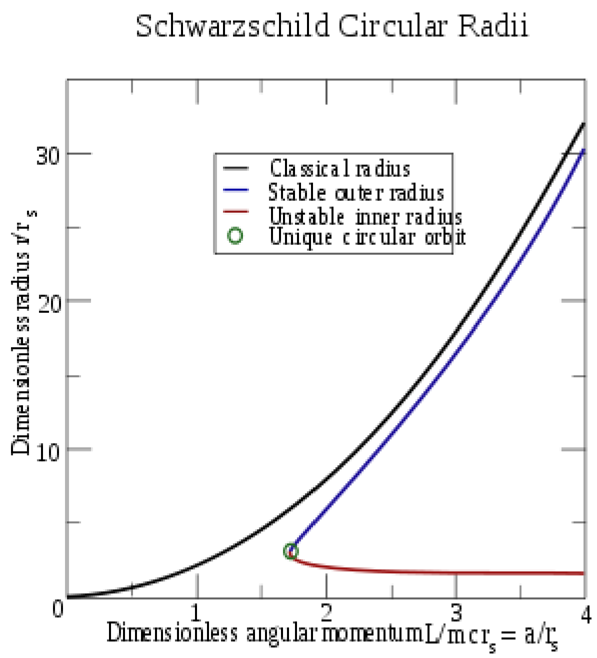
$$r_{\text{inner}} = \frac{a^2}{r_s}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{3r_s^2}{a^2}}\right) = \frac{3a^2}{r_{\text{outer}}}$$

Obe oddaljenosti izhajata iz kvadratne enačbe. Notranji radij r_{inner} je nestabilen, saj privlačna sila (tretji člen) raste veliko hitreje od drugih dveh sil, če r pada, in če delec zdrsne rahlo navznoter od r_{inner} (kjer so vse tri sile v ravnovesju), tretja sila prevlada nad ostalima dvema in tako potegne delec navznoter do r = 0. Pri zunanjem radiju so krožne tirnice stabilne, tretji člen postane manj pomemben in sistem »centralna masa – delec« se obnaša bolj kot nerelativistični Keplerjev problem.

Ko je člen a veliko večji od r_s (klasični primer), lahko te formule poenostavimo.

$$r_{\text{outer}} \approx \frac{2a^2}{r_s}$$

$$r_{\text{inner}} \approx \frac{3}{2} r_s$$



Stabilne in nestabilne orbite so narisane glede na normirano vrtilno količino $a/r_s = L/mcr_s$ in sicer v modri in rdeči barvi (nestabilna). Ti krivulji se srečata na enolični točki - za krožno tirnico (zelen krog), ko je normirana vrtilna količina enaka kvadratnemu korenu iz števila tri. Da bi bolje poudarili klasični polmer centripetalnega pospeška iz Newtonovega gravitacijskega zakona, je le ta narisan s črno barvo.

Z nadomeščanjem a in r_s pri enčbi za r_{outer} dobimo klasično formulo za delec, ki kroži okrog mase M.

$$r_{\text{outer}}^3 \approx \frac{GM}{\omega_\varphi^2}$$

pravilneje

$$r_{\text{outer}}^3 = \frac{G(M+m)}{\omega_\varphi^2}$$

kjer je ω_φ orbitalna hitrost delca. To je formula v nerelativistični mehaniki za sistemsko centrifugalno silo, ki je enaka Newtonovi gravitacijski sili:

$$\frac{GMm}{r^2} = \mu\omega_\varphi^2 r$$

Kje je μ reducirana masa.

V našem zapisu je klasična orbitalna kotna hitrost enaka:

$$\omega_\varphi^2 \approx \frac{GM}{r_{\text{outer}}^3} = \left(\frac{r_s c^2}{2r_{\text{outer}}^3}\right) = \left(\frac{r_s c^2}{2}\right)\left(\frac{r_s^3}{8a^6}\right) = \frac{c^2 r_s^4}{16a^6}$$

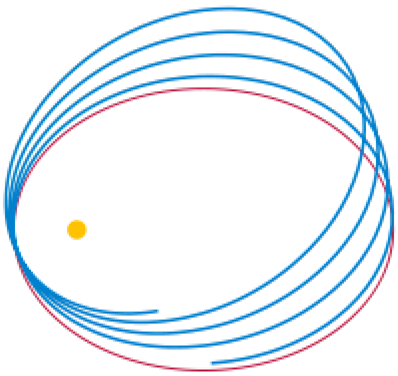
Druga skrajnost je, ko je $a^2 = 3r_s^2$, obe krivulji konvergirata v skupno vrednost.

$$r_{\text{outer}} \approx r_{\text{inner}} \approx 3r_s$$

Rešitvi kvadratne enačbe pripeljeta do sklepa, da je r_{outer} vedno večji od $3r_s$, kjer r_{inner} leži med $r_s{}^3\!/_2$ in $3r_s$. Krožne orbite manjše od $r_s{}^3\!/_2$ niso mogoče. Za delce brez mase, gre člen a v neskončnost, kar pomeni, da je krožna orbita za fotone pri $r_{\text{inner}} = 3r_s/2$. Krogla s takim radijem je znana pod imenom fotonska sfera.

http://en.wikipedia.org/wiki/Schwarzschild_geodesics

Precesija eliptične orbite



V nerelativističnem Keplerjevem problemu delec potuje zmeraj po isti poti - po elipsi (rdeča orbita). Splošna teorija relativnosti uvaja tretjo silo, ki privlači delce nekoliko močneje od Newtonove gravitacije, še posebej pri majhnih radijih. Ta tretja sila povzroča precesijo eliptične orbite delca (sivo-modra orbita) v smeri njenega vrtenja. Prvi tak primer je bil izmerjen za planet Merkur, tudi Venero in Zemljo. Rumena pika v orbitah je središče privlaka, npr. Sonce.

Hitrost orbitalne precesije se lahko izračuna z uporabo potenciala V. Majhen radialni odmik od krožne orbite r_{outer} se bo konstantno zamikal s kotno frekvenco, ki jo lahko zapišemo kot odvod potenciala.

$$\omega_r^2 = \frac{1}{m}\left[\frac{d^2V}{dr^2}\right]_{r=r_{\text{outer}}}$$

$$V(r) = \frac{mc^2}{2}\left[-\frac{r_s}{r} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{r_s a^2}{r^3}\right]$$

ki je enak

$$\omega_r^2 = \left(\frac{c^2 r_s}{2r_{\text{outer}}^4}\right)(r_{\text{outer}} - r_{\text{inner}}) = \omega_\varphi^2 \sqrt{1 - \frac{3r_s^2}{a^2}}$$

Kvadratni koren na obeh straneh in pomoč binomskega izreka da približek.

$$\omega_r = \omega_\varphi \left(1 - \frac{3r_s^2}{4a^2} + \cdots\right)$$

Kotno hitrost pomnožimo s periodo obrata T, tako dobimo precesijski kot.

$$\delta\varphi = T(\omega_\varphi - \omega_r) \approx 2\pi\left(\frac{3r_s^2}{4a^2}\right) = \frac{3\pi m^2 c^2}{2L^2} r_s^2$$

Ker smo uporabili za $\omega_\varphi T = 2\pi$ in za $a = L/(mc)$ ter nadomestili rs s Schwarzschildovim radijem, dobimo naslednjo povezavo.

$$\delta\varphi \approx \frac{3\pi m^2 c^2}{2L^2}\left(\frac{4G^2M^2}{c^4}\right) = \frac{6\pi G^2 M^2 m^2}{c^2 L^2}$$

Izraz lahko poenostavimo z uporabo velike polosi A in ekscentričnosti eliptične orbite.

$$\frac{L^2}{GMm^2} = A\left(1 - e^2\right)$$

Sledi najpogostejša oblika zapisa kota precesije.

$$\delta\varphi \approx \frac{6\pi GM}{c^2 A(1 - e^2)}$$

Schwarzschildova dogodkovna sfera (Rs = 2GM/c^2) in fotonska sfera (Rf = 3GM/c^2)

Spet začnimo s Schwarzschildovo metriko:

$$ds^2 = -c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Schwarzschildov polmer dogodkovnega obzorja ali horizonta črne luknje ($Rs = 2GM/c^2$) izhaja direktno iz zgoraj zapisane Schwarzschildove metrike, ko gre člen $(1 - 2GM/rc^2)^{-1}$ proti neskončnosti, oziroma je $1 - 2GM/rc^2 = 0$. Enak rezultat lahko uganemo iz druge kozmične hitrosti, kjer privzamemo za ubežno hitrost kar hitrost svetlobe ($Wk + Wp = 0$ ➔ $mv^2/2 - GMm/R = 0$ ➔ $mv^2/2 = GMm/R$ ➔ $V = (2GM/R)^{1/2}$ ➔ $c = (2GM/R)^{1/2}$ ➔ $Rs = 2GM/c^2$).

A vprašajmo se še o fotonski sferi črne luknje. To je polmer, na katerem foton(i) še ravno lahko kroži(jo) okrog črne luknje. Tukaj pa nam ugibanje iz klasične mehanike odpove. Polmer fotonske sfere smo v bistvu že izpeljali v poglavju »Krožne orbite in njihova stabilnost« ($R_f = r_{inner} = 3r_s/2 = 3GM/c^2$), a za vajo izvedimo izračun še po nekoliko krajši poti, z več osredotočenosti zgolj na kroženje. Iz Schwarzschildove metrike bomo izločili vse člene, ki se pri kroženju ne spreminjajo. Ker gre za kroženje pri radiju 'r', se zagotovo ne spreminja radij (zato je $dr = 0$). $dS^2 = c^2dt'^2 = 0$, ker gre za foton, ki se seveda giblje s hitrostjo svetlobe. $d\theta=0$ je nič, ker se kot θ ne spreminja. Ostaneta nam torej dva člena:

$$\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 = r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

Kjer za θ privzamemo vrednost $\pi/2$, velja $\sin(\pi/2) = 1$, velja tudi ekvivalent simbolov za $\varphi = \phi$.

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$$

Izraz korenimo, da dobimo kotno hitrost $d\varphi/dt = (1/r^2 - 2GM/r^3c^2)^{1/2}$.

Ker gre za enakomerno kroženje , je odvod kotne hitrosti nič, velja torej:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

Če torej odvajamo izraz [$d\varphi/dt = (1/r^2 - 2GM/r^3c^2)^{1/2}$] še enkrat po času, dobimo na desni, znotraj daljšega izraza, tudi člen [$(-2/r^3 + 6GM/r^4c^2)$], ki mora biti nič. Tako pridemo do že znanega rezultata za polmer fotonske sfere:

$$r_f = \frac{3GM}{c^2}$$

Pod sfero polmera $R_f = 3R_s/2 = 3GM/c^2$ ne more nič več krožiti okrog črne luknje.

https://cs.wikipedia.org/wiki/Schwarzschildova_metrika
https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio-tempo_di_Schwarzschild

Povzel: VIČAR Zorko

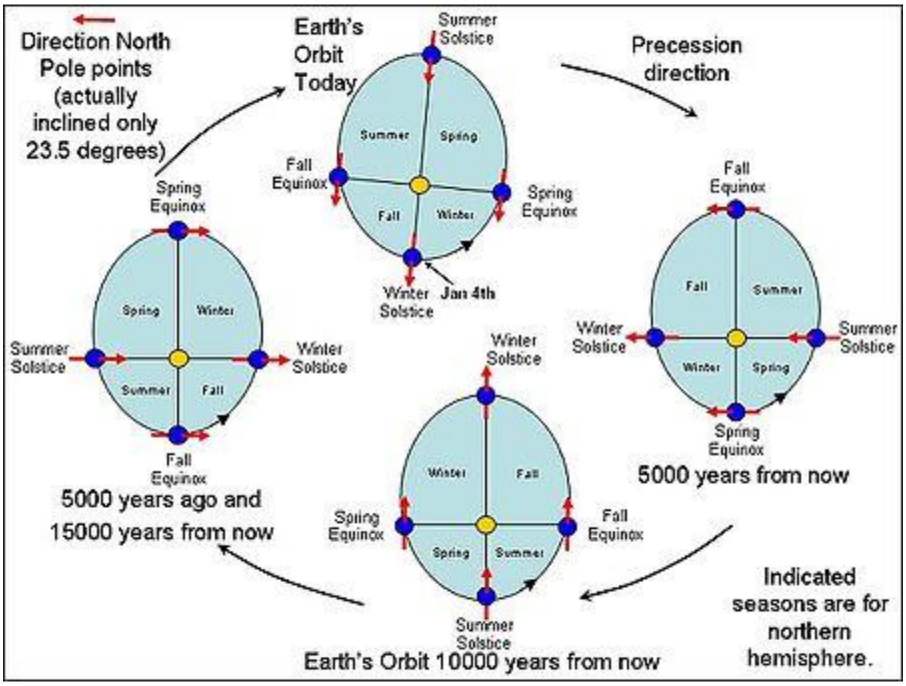
"Lublana" avg. 2015

SE NADALJUJE ...

Literatura:

- **svetovni splet**
- Teorija Gravitacije
  Andrej Čadež
  DMFA založništvo, Ljubljana 2011
- **...**

SLEDI NEKAJ MATEMATIČNIH IN FIZIKALNIH IZRAZOV ...



Precession of orbits

The function sn and its square sn^2 have periods of $4K$ and $2K$, respectively, where K is defined by the equation[note 2]

$$K=\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{\left(1-y^2\right)\left(1-k^2 y^2\right)}}$$

Therefore, the change in φ over one oscillation of *u* (or, equivalently, one oscillation of *r*) equals[2]

$$\Delta\varphi = \frac{4K}{\sqrt{r_s\left(u_3 - u_1\right)}}$$

In the classical limit, u_3 approaches $1/r_s$ and is much larger than u_1 or u_2. Hence, k^2 is approximately

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} \approx r_s\left(u_2 - u_1\right) \ll 1$$

For the same reasons, the denominator of Δφ is approximately

$$\frac{1}{\sqrt{r_s\left(u_3 - u_1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - r_s\left(2u_1 + u_2\right)}} \approx 1 + \frac{1}{2}r_s\left(2u_1 + u_2\right)$$

Since the modulus *k* is close to zero, the period *K* can be expanded in powers of *k*; to lowest order, this expansion yields

$$K \approx \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\left(1 + \frac{1}{2}k^2y^2\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right)$$

Spodaj

Z **Lagrangeevimi enačbami** je mogoče poiskati diferencialne enačbe, ki opisujejo obnašanje mehanskega sistema, prek energijskih konceptov.

Posplošene koordinate

Enačbe so izražene v posplošenih koordinatah, ki precej olajšajo obravnavo pri omejitvah v gibanjih (npr. gibanje je mogoče le po neki omejeni množici točk) in jih je mogoče zlahka preračunati v katerikoli koordinatni sistem. Te posplošene koordinate $q_i\left(t\right)$ so časovne funkcije, njihovo število je enako številu prostostnih stopenj sistema, končni rezultat Lagrangeevega postopka pa so diferencialne enačbe, kjer so po času odvajane te posplošene koordinate.

Energije in Lagrangeeva funkcija

Najprej izračunamo kinetično energijo celotnega mehanskega sistema in jo izrazimo s posplošenimi koordinatami:

$$W_\mathrm{k}\left(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ldots, q_n, \dot{q}_n\right).$$

Kinetična energija je zagotovo odvisna od časovnih odvodov posplošenih koordinat (se pravi, od hitrosti v smereh teh koordinat), v nekaterih primerih pa še od samih posplošenih koordinat.

Nato s posplošenimi koordinatami izrazimo še potencialno energijo sistema:

$$W_{\mathrm{p}}(q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Potencialna energija je odvisna le od posplošenih koordinat, nikoli od njihovih časovnih odvodov. Izračunamo jo iz sil, ki so posledica potencialnih (konservativnih) polj, to je tistih polj, pri katerih je delo odvisno le od začetne in končne točke, neodvisno pa od opravljene poti med njima (posledično je delo vzdolž sklenjene poti enako nič). Primeri potencialnih sil so težnost, električna sila, sile v prožnih vzmeteh itd.

Preostale nepotencialne sile (npr. trenje, upor, zunanje sile itd.) bomo upoštevali nekoliko kasneje.

Razlika tako izražene kinetične in potencialne energije se imenuje Lagrangeeva funkcija (tudi »lagranžijan« ali »Lagrangiana«), po navadi jo označimo s črko *L*:

$$\mathcal{L} = W_{\mathrm{K}} - W_{\mathrm{P}}.$$

Lagrangeeva enačba

Po nekoliko daljšem izpeljevanju se izkaže, da dobimo diferencialne enačbe mehanskega sistema z naslednjimi Lagrangeevimi enačbami:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum F_{\mathrm{s}},$$

kjer desna stran predstavlja vsoto vseh sil, ki delujejo v smeri posplošene koordinate $q_i$in še niso bile upoštevane pri računanju potencialne energije. Postopek ponavljamo za vse posplošene koordinate, na koncu torej dobimo toliko diferencialnih enačb, kolikor je posplošenih koordinat.

Uporabnost

Metoda je uporabna le pri sorazmerno enostavnih mehanskih sistemih z ne preveč posplošenimi koordinatami, sicer postane zapleteno že »peš« računaje energij, odvajanja pa še toliko bolj. V takšnih primerih si lahko pomagamo le s programskimi paketi za simbolično računanje, pa še pri teh bo računaje trajalo kar nekaj časa.

Zgledi

Prosti pad brez zračnega upora

Točkasto telo z maso *m* prosto pada. Na maso navpično navzdol deluje gravitacijska sila:

$$F_{\mathrm{g}} = mg.$$

Pri tem zaradi točkastega telesa, ki nima razsežnosti, zračni upor zanemarimo, tako da nanj ne delujejo druge sile. *x* je navpična koordinata, na začetku pada enaka 0, s pozitivno smerjo navzgor. Med gibanjem je težni pospešek *g* konstanten. Lagrangeeva funkcija je:

$$\mathcal{L} = W_{\mathrm{k}} - W_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - mgx$$

in enačba prostega pada:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=m\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}t}-(-mg)=0,$$

kar lahko nazadnje zapišemo z nehomogeno linearno diferencialno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+g=0.$$

Hitrost je:

$$\int\mathrm{d}(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)=\int\mathrm{d}v=-g\int\mathrm{d}t,$$

$$v=-gt+v_0,$$

kjer je $v_0$začetna hitrost. Trenutna lega je:

$$\int\mathrm{d}x=\int(-gt+v_0)\mathrm{d}t,$$

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0,$$

kjer je $x_0$začetna višina, kot rečeno, enaka 0.

Prosti pad z newtonskim uporom

Lagrangeeva funkcija je enaka kot pri prostemu padu brez zračnega upora, enačba prostega pada s kvadratnim zakonom zračnega upora, kjer je na desni strani sila upora, pa je:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=m\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}t}-(-mg)=F_{\mathrm{u}},$$

kar da nehomogeno nelinearno enačbo Riccatijevega tipa:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-k\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+mg=0,$$

kjer je:

$$k=\frac{1}{2}c_{\mathrm{u}}\rho S$$

in pri tem:

c_{u}... koeficient upora,

ρ... gostota sredstva (zraka),

S... čelni presek telesa.

Hitrost je:

$$v = -v_\mathrm{m}\,\mathrm{th}\left(\frac{gt}{v_\mathrm{m}} - \mathrm{Arth}\,\frac{v_0}{v_\mathrm{m}}\right),$$

trenutna lega pa:

$$x = -\frac{v_\mathrm{m}^2}{g}\ln\left[\mathrm{ch}\left(\frac{gt}{v_\mathrm{m}} - \mathrm{Arth}\,\frac{v_0}{v_\mathrm{m}}\right)\right] + x_0.$$

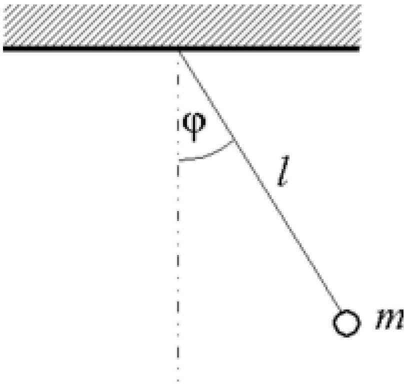
Telo doseže konstantno mejno hitrost (oznaki $v_\mathrm{m}$ali v_∞):

$$v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{2mg}{c_\mathrm{m}\rho S}} = \sqrt{\frac{mg}{k}},$$

ko pojemek zaradi zračnega upora postane enako velik kot težni pospešek.[1]

Točkasto nihalo

Oglejmo si uporabo Lagrangeevih enačb na preprostem primeru točkastega nihala, kot je prikazano na sliki.



Na neraztegljivi vrvici dolžine *l* naj visi dovolj majhna utež z maso *m*, da jo lahko smatramo kot točko. Poleg sile v vrvici naj bo edina sila na utež sila težnosti, ki s težnim pospeškom *g* deluje navpično navzdol. Zračni upor in vse ostale sile zanemarimo. Predpostavimo, da je vrvica ves čas napeta.

Sistem ima le eno prostostno stopnjo, zasuk φ, ki naj bo tako tudi edina posplošena koordinata.

Kinetična energija točkaste uteži je enaka:

$$W_\mathrm{k} = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2.$$

Pri računanju potencialne energije moramo najprej poznati dogovorjeno vrednost potencialne energije v neki dogovorjeni točki. Končni rezultat je sicer neodvisen od teh dogovorjenih vrednosti, bodo pa vmesni izračuni precej enostavnejši, če privzamemo, da naj bo potencialna energija v povsem navpični legi nihala (pri

$\varphi = 0$) enaka nič. Višinske razlike točkaste uteži v odvisnosti od naklonskega kota φ ni težko izračunati, na koncu dobimo naslednjo zvezo za potencialno energijo:

$$W_\mathrm{p} = mgl\left(1 - \cos\varphi\right).$$

Lagrangiana je tako enaka:

$$\mathcal{L} = W_\mathrm{k} - W_\mathrm{p} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\left(1 - \cos\varphi\right) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl + mgl\cos\varphi.$$

Odvajajmo jo najprej po časovnem odvodu zasuka φ:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}.$$

dobljeni vmesni rezultat pa še po času:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi}.$$

Odvajajmo Lagrangiano še po zasuku φ, pri tem upoštevamo zasuk in njegov časovni odvod kot dve neodvisni spremenljivki:

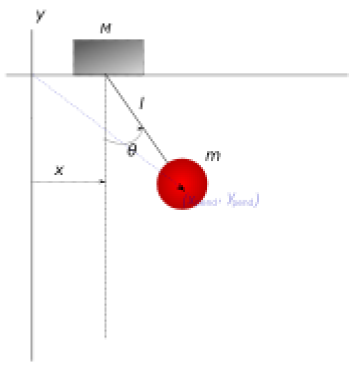
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -mgl\sin\varphi.$$

Zunanjih sil ni, ravno tako smo zanemarili zračni upor.

Če vse delne rezultate združimo v Lagrangeevi enačbi, dobimo naslednjo homogeno nelinearno diferencialno enačbo, ki opisuje nihanje točkastega nihala:

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0.$$

Točkasto nihalo na gibljivi podpori



Podobno sta enačbi, če je nihalo obešeno na gibljivo podporo z maso *M*.

$$(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\varphi}\cos\varphi-ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi=0$$

$$\ddot{\varphi}+\frac{\ddot{x}}{l}\cos\varphi+\frac{g}{l}\sin\varphi=0.$$

Hamiltonovo načelo

Akcija, označena s $\mathcal{S}$, je časovni integral Lagrangeeve funkcije:

$$\mathcal{S}=\int\mathcal{L}\,\mathrm{d}t.$$

Naj sta q_0 in q_1 koordinati v začetnem in končnem času t_0 in t_1. Z variacijskim računom se da pokazati, da so Lagrangeeve enačbe enakovredne Hamiltonovemu načelu*:*

> *Sistem med t_0 in t_1 gre po tiru, katerega akcija je stacionarna vrednost.*

Stacionarna pomeni, da se akcija ne spreminja do prvega reda za infinitezimalne deformacije tira z nepomičnima končnima točkama (q_0, t_0) in (q_1,t_1). Hamiltonovo načelo lahko zapišemo kot:

$$\delta\mathcal{S}=0.$$

Namesto, da bi si mislili kako telesa ali delci zaradi na njih delujočih sil pospešujejo, lahko mislimo, da si izberejo pot s stacionarno akcijo.

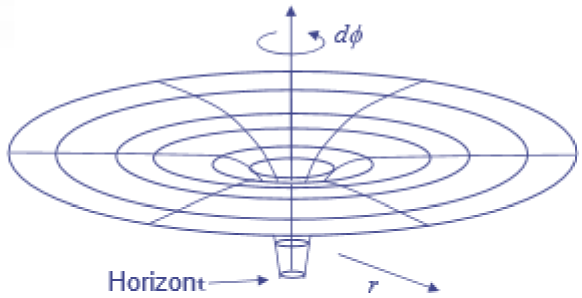
Hamiltonovo načelo včasih imenujejo načelo najmanjše akcije. Vendar je to napačno - akcija mora biti le stacionarna s poljubno variacijo h funkcionala, ki povečuje funkcionalni integral akcije. Pri tem ni nujno, kar velikokrat napačno navajajo, da je minimalna ali maksimalna za funkcional akcije.

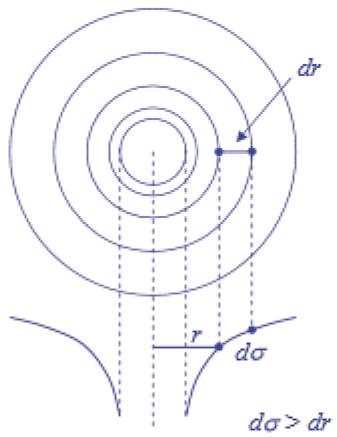
To načelo lahko namesto Newtonovih zakonov uporabimo kot osnovno načelo mehanike. Newtonovi zakoni temeljijo na diferencialnih enačbah, tako da lahko uporabimo integralsko načelo za osnovo mehanike. Hamiltonovo načelo je variacijsko načelo s holonomnimi vezmi. Če imamo neholonomne sisteme, moramo variacijsko načelo zamenjati z d'Alembertovim načelom virtualnega dela (načelo virtualnih premikov). Če delamo le s holonomnimi vezmi, moramo plačati ceno za elegantno variacijsko formulacijo mehanike.

$$d\sigma^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\frac{dr^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}+r^2d\phi^2$$

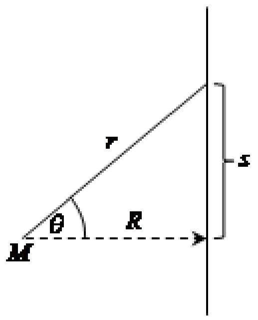
$$\boxed{d\sigma^2=\frac{dr}{1-2M/r}+r^2d\phi^2} \qquad dt=0$$

$$\boxed{d\sigma=dr_{shell}=\frac{dr}{\left(1-2M/r\right)^{1/2}}} \qquad dt=0,\ d\phi=0$$





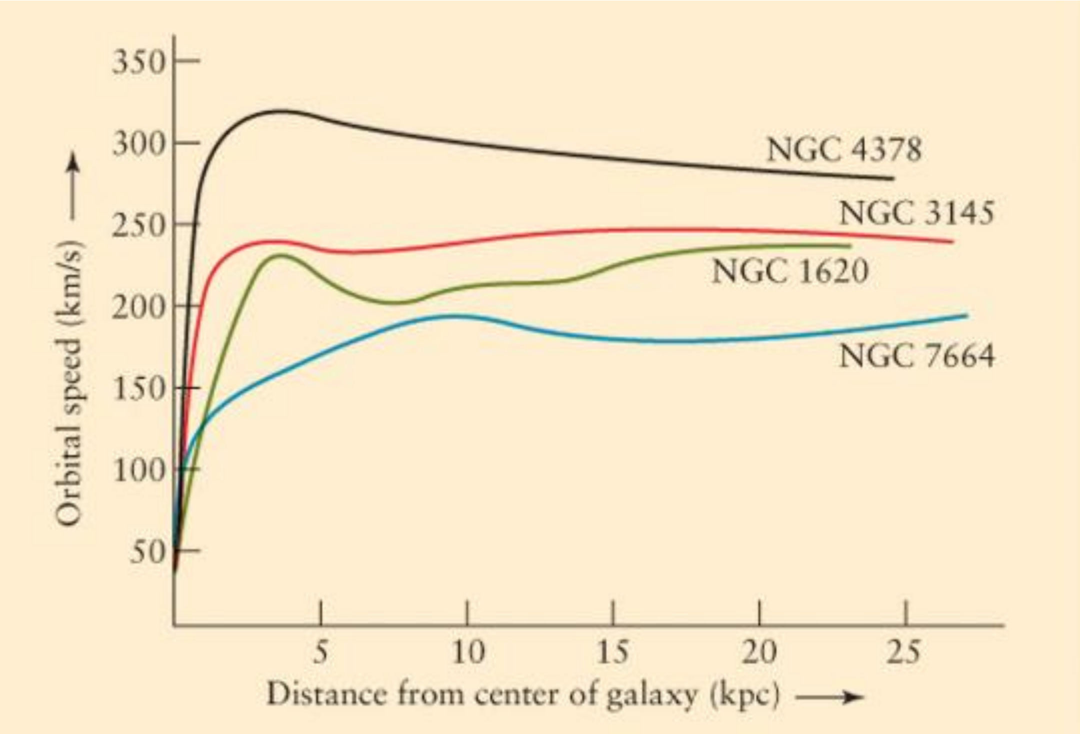
$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$$



$$a = \frac{1}{c^2} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{GM}{R} \cos\theta d\theta \;=\; 2\frac{GM}{c^2R} \qquad (3)\ Alternative\ 1911\ Formula$$

$$a = \frac{1}{c^2} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 2\Phi \cos\theta d\theta \;=\; 4\frac{\Phi}{c^2} \qquad (14)\ Alternative\ 1916\ Formula$$

$$a = \frac{1}{c^2} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \left(2\Phi - \frac{\Phi^2}{c^2}\right) \cos\theta d\theta \;=\; \frac{4\Phi c^2 - 2\Phi^2}{c^4} \qquad (15)\ Relativistic\ Formula$$



http://en.wikipedia.org/wiki/Two-body_problem_in_general_relativity
http://en.wikipedia.org/wiki/Schwarzschild_geodesics

Za razmerje lastnega časa dτ v koordinatnem sistemu, ki se premika z dogodkom v gravitaciji in dt merjenega v koordinatnem sistemu daleč vstran od masivnih teles, velja naslednja povezava:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Člen (1 - r_s/r) pripada vplivu gravitacije, člen $(1 – v^2/c^2)^{1/2}$ pa gibanju, ki ni posledica gravitacije.

Za hitrost v radialni smeri velja **$dr/d\tau = v_{||}((1 - r_s/r)/(1 - v^2/c^2))^{1/2}$**

V tangentni smeri pa velja **$d\varphi/d\tau = v_\perp/(r(1 - v^2/c^2)^{1/2})$**

$V_{||}/dt = [v_{||}((1 - r_s/r)/(1 - v^2/c^2))^{1/2}][((1 - r_s/r)(1 - v^2/c^2))^{1/2}] = v_{||}(1 - r_s/r)$

$V_\perp/dt = [v_\perp/(r(1 - v^2/c^2)^{1/2})][((1 - r_s/r)(1 - v^2/c^2))^{1/2}] = v_\perp(1 - r_s/r)^{1/2}$

Hitrosti, ki jih vidi oddaljeni opazovalec (**$V_\perp$** - pravokotna hitrost na radij in hitrost **$V_{||}$** - v radialni smeri) se torej izrazita z naslednjima povezavama.

$$V_\perp = v_\perp\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}$$

$$V_\| = v_\| \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$$